ANTÔNIO TRAJANO



$12:6::8:4$



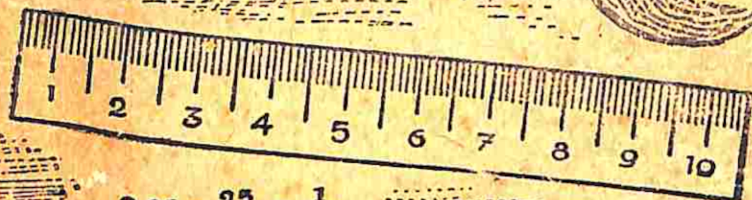
$6\frac{3}{4} = \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{27}{4}$





$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$





$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

ARITMÉTICA ELEMENTAR ILUSTRADA

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

Aritmética Elementar

ILUSTRADA

Para uso dos alunos adiantados das escolas primárias

Obra premiada pelo júri da Exposição Pedagógica do Rio de Janeiro e adotada pela Instrução Pública em vários Estados do Brasil

COMPOSTO PELO PROFESSOR

ANTÔNIO TRAJANO

Autor da Aritmètica Primária, Aritmética Progressiva, Álgebra Elementar, Chave da Aritmética Progressiva e Chave da Álgebra

---

139.ª EDIÇÃO

atualizada por FRANKLIN MENDES

LIVRO DE USO AUTORIZADO PELO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (REGISTRO N.o 2.291)

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

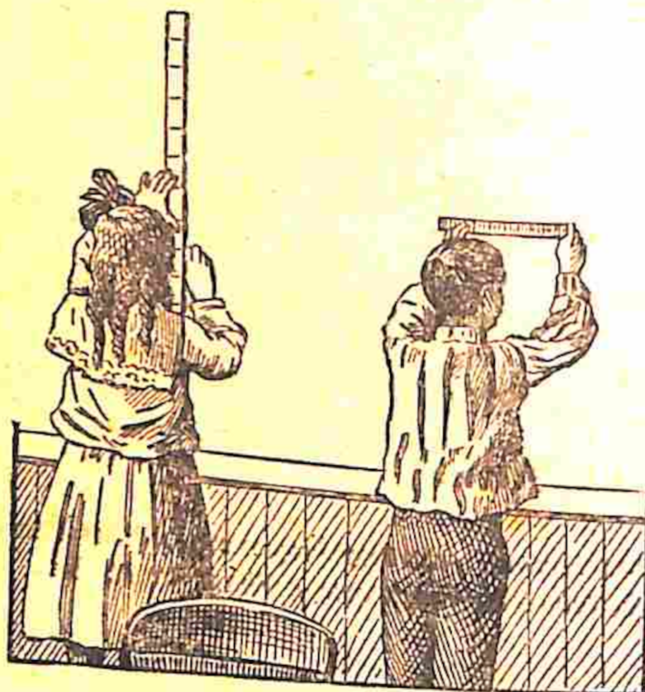
EDITÔRA PAULO DE AZEVEDO LTDA.

166, Rua do Ouvidor — Rio de Janeiro

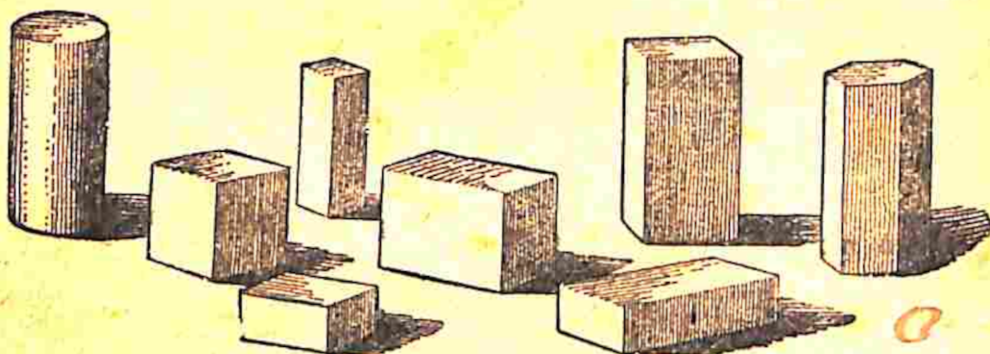
SÃO PAULO
292, Rua Líbero Badaró

BELO HORIZONTE
Rua Rio de Janeiro, 655

1962



Medição de áreas



Medição de volumes

APROVAÇÃO E ADOÇÃO DESTA OBRA

Apresentamos agora a *Aritmética Elementar Ilustrada* na **60.ª edição,** mais desenvolvida e ampliada do que nas edições precedentes, e com o aperfeiçoamento metódico que o estudo e a longa prática do ensino nos têm demonstrado ser mais vantajoso e conducente para adextrar os alunos no manejo dos números e da arte de calcular.

A importância dêste livro pode ser fàcilmente avaliada pelo acolhimento que êle teve da imprensa, do professorado e até da própria infância que por êle estudou, logo nas suas primeiras edições. Além dêste acolhimento imediato e tão honroso, esta obra foi depois premiada pelo Júri da Exposição Pedagógica do Rio de Janeiro; foi adotada no ensino em diversos estados do Brasil, e recebida com grande satisfação por muitos estabelecimentos importantes de educação. As cincoenta e nove edições já esgotadas atestam a sua grande utilidade no ensino desta disciplina.

O Conselho Superior de Instrução da Capital Federal, reconhecendo a grande vantagem da adoção dêste livro no ensino das escolas públicas, nomeou uma comissão composta de três ilustres professores, para emitir o seu juízo sôbre êle.

Esta comissão apresentou os seguintes pareceres:

"Li a *Aritmética Elementar* do Sr. Antônio Trajano, e tenho prazer em poder declarar que é ela uma das melhores, se não melhor de tôdas as que conheço destinadas à instrução da infância. Tal foi o parecer do ilustre professor, de saudosa memória, Dr. Benjamin Constant, sôbre o livro a que se refere êste requerimento. Só me resta, pois, subscrever o parecer daquele ilustre mestre e recomendar o livro para uso das escolas públicas desta Capital. Em 20 de Agôsto de 1907.

ALBERTO GRACIER.

"Estou de pleno acôrdo com o parecer do meu colega relator.

O trabalho do professor A. Trajano é o que se pode imaginar de melhor no gênero, e certamente continuará a prestar à instrução primária os mesmos serviços que tem até aqui prestado. Em 22 de Agôsto de 1907."

DR. F. PINHEIRO BITTENCOURT.

"Durante grande parte do meu exercício de professor primário, tive no livro cuja aprovação ora se pede, um valioso auxiliar, que a meu ver, preenche tôdas as condições de uma obra didática. Em 26 de Agôsto de 1907."

ANTÔNIO CARLOS VELHO DA SILVA.

À vista de tão autorizados pareceres, o Conselho Superior de Instrução da Capital Federal, em sessão de 30 de Agôsto de 1907, aprovou unânimemente e adotou para uso dos alunos das escolas públicas, a *Aritmética Elementar Ilustrada* do **professor Antônio Trajano."**

Os pareceres da comissão e a deliberação do Conselho aqui exarados, **foram** extraídos textualmente da ata da sessão do mesmo Conselho.

Entre as numerosas apreciações **honrosas** feitas a êste livro, citaremos sòmente as seguintes que, por serem de pessoas de elevada reputação, **não devem ficar esquecidas.**

O ilustrado Dr. Benjamin Constant, autoridade da maior competência nesta matéria, começou do seguinte modo o seu respeitável parecer:

"Li a *Aritmética Elementar* do Sr. Antônio Trajano, e tenho prazer em poder declarar que é ela uma das melhores, senão a melhor de tôdas as que conheço destinadas à instrução da infância."

O ilustrado Dr. Manoel P. C. de Amarante, lente de mecânica da Escola Militar desta Capital, dando a sua autorizada opinião sôbre esta obra, entre outras coisas, disse o seguinte:

"Exposição clara e simples, dificuldades apresentadas gradualmente e gradualmente vencidas; figuras bem combinadas, que ilustram e embelezam o livro; grande número de exercícios instrutivos e de problemas, cujos dados são por vêzes com felicidade escolhidos dentre os elementos da economia doméstica, da cronologia, história, etc., etc., nitidez de impressão, tudo contribuiu para tornar interessante e apreciável o novo compêndio, do qual, parece-me, se pode dizer, é um livro útil.

Cada um sabe, e muitos de experiência própria, o desgôsto e o desânimo que o estudo da regra de três, de juros, etc., causa aos principiantes, sobrecarregando-lhes a memória, e o prazer que ao contrário, lhes dá o método analítico, chamado de redução à unidade, pela facilidade com que o aprendem e aplicam.

"E' assim que o Sr. Trajano faz dêsse método com muito acêrto largo uso em todo o seu livro, e é a chave de ouro com que o fecha."

Ilm. Sr. — Em resposta ao ofício de V. S., de 11 do corrente, pedindo o meu parecer sôbre a *Aritmética Elementar Ilustrada* de Antônio Trajano, tenho a dizer que acho êsse livro de grande valor para o principiante. O processo material que emprega e que consta das ilustrações de que é cheio o livro, torna compreensíveis e com tôda a clareza as diversas questões que, em outros compêndios, são tratadas de modo a levar o desânimo ao principiante, que, ou abandona o estudo, ou se vê obrigado a decorar sem compreender o que lê. E' esta ciência tão útil e no nosso país ainda tão mal estudada, por falta de livros como o do Sr. Trajano, cuja adoção nas nossas escolas será com certeza de grande vantagem para os que vão ensaiar os primeiros passos na ciência dos números, pois estou certo virá fazer desertar os livros que pretendem ensinar os princípios, não a quem sabe, mas a quem já deve saber muito. Êste útil livrinho, que virá tornar o ensino da Aritmética tão agradável, deverá sempre substituir êsses livros-esfinges, que fazem recuar desanimado o principiante.

Ilm. Sr. Dr. Arthur Cesar Guimarães, digníssimo inspetor geral da Instrução Pública de S. Paulo.

DR. AUGUSTO OLAVO RODRIGUES FERREIRA,
Diretor Geral.

DECLARAÇÃO

ARITMÉTICA ELEMENTAR

DEFINIÇÕES — NUMERAÇÃO

1. Aritmética é a ciência elementar dos números.

Os números servem para indicar *quantos* objetos tem uma coleção. Cada um dos objetos que formam a coleção é uma *unidade*. Quando procuramos o número de objetos de uma coleção realizamos a operação de *contar*. Assim, para contar as penas contidas numa caixa poderemos retirá-las uma a uma, dizendo: uma pena, duas penas, três penas, etc. até esvaziar completamente a caixa. Se, como acabamos de fazer, ao contar, designamos a espécie da unidade (pena), o número se diz *concreto* (sete penas, três lápis, oito canetas, por exemplo); se não designamos a espécie da unidade, dizendo, apenas, um, dois, três, quatro, etc., o número se diz *abstrato*.

2. Numeração é a parte da Aritmética que ensina a ler e a escrever os números; por isso se divide em numeração falada e numeração escrita.

3. A **numeração falada** ensina a dar nome a todos os números, com uma limitada quantidade de palavras.

Há uma infinidade de números e, se déssemos um nome diferente a cada um, teríamos de guardar na memória milhões de nomes, o que seria muito difícil e até impossível. Para remediar êste inconveniente, inventou-se um meio fácil de dar um nome distinto a cada número, dispondo e combinando só as seguintes palavras:

Um	**dez**	**cem**	**mil**	milhão
Dois	vinte	duzentos		bilião
Três	trinta	trezentos		trilião
Quatro	quarenta	quatrocentos		quatrilião
Cinco	cinqüenta	quinhentos		quintilião
Seis	sessenta	seiscentos		sextilião
Sete	setenta	setecentos		septilião
Oito	oitenta	oitocentos		octilião
Nove	noventa	novecentos		nonilião

Destas palavras, doze são primitivas, a saber: **um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem** e **mil**, e delas se formam tôdas as outras pelo acrescimento de uma das terminações **enta, entos, lhão**, ou **lião.** De sorte que com doze palavras primitivas e quatro terminações, podemos exprimir em português todos os números imagináveis. Assim, tendo nós, por exemplo, as palavras três, trinta e trezentos, podemos enunciar os números — *trinta e três — trezentos e três — trezentos e trinta — trezentos e trinta e três.* Tendo mais a palavra mil, podemos exprimir os números — *mil e três — mil e trinta — mil trezentos e três — mil trezentos e trinta*, e muitíssimos outros números. Combinando dêste modo as outras palavras, podemos dar um nome distinto a todos os números necessários e imagináveis.

Nota. Desde o número onze até o número quinze, a linguagem da numeração não segue a ordem regular das outras dezenas; pois em lugar de se dizer dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco, o uso introduziu onze, doze, treze, quatorze e quinze.

Algumas aritméticas usam os têrmos **bilhão, trilhão**, etc.; mas Aulete, Adolfo Coelho, João de Almeida e João de Deus escrevem sempre **bilião, trilião**, etc.; e são estas as formas que adotamos.

4. Numeração escrita ensina a escrever todos os números com poucos sinais chamados *algarismos*.

Se tivéssemos de escrever os números como os falamos, seria muito difícil fazer as operações de Aritmética. Assim, para escrevermos o número *setenta e seis mil e duzentos e oitenta e quatro*, teríamos de empregar trinta e oito letras; ao passo que com cinco algarismos o exprimimos com tôda a clareza, escrevendo 7 6 2 8 4.

5. Estudaremos duas espécies de algarismos: algarismos arábicos e algarismos romanos.

6. Algarismos arábicos são os dez sinais seguintes chamados:

1,	**2,**	**3,**	**4,**	**5,**	**6,**	**7,**	**8,**	**9,**	**0.**
um,	dois,	três,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove,	zero.

Os primeiros nove chamam-se **algarismos significativos**; ao zero dá-se também o nome de *cifra*.

Formação das diversas unidades

7. Uma só coisa chama-se uma unidade; dez coisas chamam-se dez unidades ou uma dezena; cem coisas chamam-se

cem unidades ou uma centena; mil coisas chamam-se mil unidades ou um milhar.

Dez unidades iguais formam outra unidade imediatamente superior; dez destas formam já outra; assim,

dez unidades simples formam uma dezena;
dez dezenas formam uma centena;
dez centenas formam um milhar;
dez milhares formam uma dezena de milhares
dez dezenas de milhares formam uma centena de milhares;
dez centenas de milhares formam um milhão, etc.

8. Êste sistema de numeração chama-se **decimal,** porque a base da formação das diversas unidades é sempre **dez.**

Nota. Há outros sistemas de numeração como o **binário**, em que duas unidades iguais formam outra unidade imediatamente superior; o **ternário**, em que três unidades iguais formam outra imediatamente superior; finalmente, o **quaternário**, o **quinário**, o **senário**, etc.

9. Em um número, cada espécie de unidades é representada por um só algarismo, e o lugar que êste ocupa chama-se **ordem.** Começando da direita para a esquerda, as unidades ocupam a primeira ordem; as dezenas, a segunda; as centenas, a terceira; os milhares, a quarta, e assim por diante, como se vê no exemplo seguinte:

	4.ª classe			3.ª classe			2.ª classe			1.ª classe		
13.ª	12.ª	11.ª	10.ª	9.ª	8.ª	7.ª	6.ª	5.ª	4.ª	3.ª	2.ª	1.ª
Trilhões	centenas de biliões	dezenas de biliões	**Biliões**	centenas de milhões	dezenas de milhões	**Milhões**	centenas de milhares	dezenas de milhares	**Milhares**	centenas	dezenas	**Unidades**
3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Dividindo o número acima em classes de três algarismos começando pela direita, notamos que cada classe contém unidades, dezenas e centenas. Na primeira classe, as unidades são simples; na segunda, as unidades são os milhares; na terceira,

as unidades são os milhões; na quarta, as unidades são os biliões, etc. A última classe nem sempre tem dezenas e centenas.

10. Como vimos, as diversas unidades têm também o nome da ordem que ocupam nos números; assim,

as unidades simples são unidades da 1.ª ordem, porque ocupam o primeiro lugar à direita do número;
as dezenas são unidades da 2.ª ordem;
as centenas são unidades da 3.ª ordem;
os milhares são unidades da 4.ª ordem;
as dezenas de milhares são unidades da 5.ª ordem;
as centenas de milhares são unidades da 6.ª ordem;
os milhões são unidades da 7.ª ordem; etc.

11. O valor das diversas ordens das unidades escreve-se do seguinte modo com algarismos:

Uma unidade (um)	1
Uma dezena (dez)	10
Uma centena (cem)	100
Um milhar (mil)	1.000
Uma dezena de milhares (dez mil)	10.000
Uma centena de milhares (cem mil)	100.000
Um milhão (milhão)	1.000.000

12. O zero isolado não tem valor algum, serve, porém, para indicar ausência de unidades de certa ordem. Assim, no número 20, como não há unidades, o seu lugar é ocupado por uma cifra; se não, ler-se-ia 2. No número 3005, como não há centenas nem dezenas, os seus lugares respectivos são ocupados por zeros; se não, o número ficaria sendo 35.

13. Valores absoluto e relativo. Todo algarismo têm dois valores, um absoluto e outro relativo. Valor absoluto é o que o algarismo tem quando isolado. Valôr relativo é o que êle toma conforme a ordem que ocupa em um número.

Se escrevermos o algarismo 3 na ordem das unidades, êle representará 3 coisas que é o seu valor absoluto; se o escrevermos na ordem das dezenas, representará 30 coisas; se o escrevermos na ordem das centenas, representará 300 coisas; e assim se irá tornando 10 vêzes maior em cada ordem à esquerda, e todos êstes valores são relativos. Quando um algarismo está só é como se ocupasse a ordem das unidades.

3
3 0
3 0 0

14. Para se tornar qualquer número dez vêzes maior, bastará juntar-lhe um zero à direita. O número 6 seguido de um zero ficará 60, porque o zero ocupará a ordem das unidades, e o algarismo 6 passará para as dezenas. Se juntarmos dois zeros, ficará 600; se juntarmos três zeros, ficará 6000, e assim por diante.

15. Para representarmos com algarismos o número quatrocentos, escreveremos primeiro 4 para exprimir as centenas, e, como neste número não há dezenas nem unidades, escreveremos dois zeros nos seus lugares, e ficará 400. Para representarmos o número três mil quatrocentos e vinte e três, escreveremos 3 para exprimir os milhares, 4 para exprimir as centenas, 2 as dezenas e 3 as unidades, e o número em algarismos será 3423.

Para se escreverem números há a seguinte

Regra: *Escreve-se, da esquerda para a direita, os algarismos das diferentes ordens a partir da ordem mais elevada, pondo-se zeros na ordem que não tiver unidades.*

Leitura dos números

16. Para facilitar a leitura de um número, poderemos dividi-lo em classes de três algarismos.

Problema. Como se lê o número 27938456875214 ?

Solução. Dividindo o número acima em classes de três algarismos, a partir da direita, vemos que tem cinco classes; e como a primeira classe é das unidades, a segunda dos milhares, a terceira dos milhões, a quarta dos biliões e a quinta dos triliões segue-se que o número contém 27 triliões, 938 biliões, 456 milhões, 875 milhares e 214 unidades.

Triliões	Biliões	Milhões	Milhares	Unidades
27	938	456	875	214

Para se ler um número, há a seguinte

Regra: *Divide-se o número em classes de três algarismos, começando pela direita; depois, começando pela esquerda,*

enuncia-se o número formado pelos algarismos de cada classe com a respectiva denominação.

Exercício de aplicação. Os discípulos enunciarão os números seguintes, e depois o professor ditará êstes ou outros que êles escreverão na pedra.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
63	878	8080	68765	9865827
90	908	9009	80074	9090909
100	1000	10000	197343	16593207
109	1004	10080	795896	854389300
250	1058	42050	871049	900000000
407	1600	55555	957412	3875873893

17. Os algarismos romanos são sete letras maiúsculas do nosso alfabeto tendo cada uma delas um valor convencionado. As sete letras e seus valores são

I,	**V,**	**X,**	**L,**	**C,**	**D,**	**M.**
um,	cinco,	dez,	cinqüenta,	cem,	quinhentos,	mil.

18. Os outros números exprimem-se repetindo-se ou combinando estas sete letras, pelo modo seguinte:

1.º As letras que se repetem são só I, X, C e M; de sorte que II vale dois; XXX vale trinta; CCC vale trezentos; MM vale dois mil, etc. Estas letras podem ser repetidas até duas vêzes seguidas.

2.º Se uma letra de menor valor estiver antes de outra de maior valor, subtrai-se o valor da 1.ª do da 2.ª; assim IV representa quatro, isto é, cinco menos um; XL representa quarenta; etc. Mas, se a letra de menor valor estiver depois da de maior valor, somam-se os dois valores; assim VI representa seis, isto é, cinco mais um; LX representa sessenta, etc.

3.º Um risco horizontal sôbre uma ou mais letras torna mil vêzes maior o seu valor; assim $\overline{C}$ representa cem mil; $\overline{CC}$ representa duzentos mil; $\overline{CD}$ representa quatrocentos mil, etc.

19. Os diversos números escrevem-se do seguinte modo com os algarismos arábicos e romanos:

Um	1	I	Vinte	20	XX
Dois	2	II	Trinta	30	XXX
Três	3	III	Quarenta ...	40	XL
Quatro	4	IV	Cinqüenta ..	50	L
Cinco	5	V	Sessenta	60	LX
Seis	6	VI	Setenta	70	LXX
Sete	7	VII	Oitenta	80	LXXX
Oito	8	VIII	Noventa	90	XC
Nove	9	IX	Cem	100	C
Dez	10	X	Duzentos ...	200	CC
Onze	11	XI	Trezentos ..	300	CCC
Doze	12	XII	Quatrocentos	400	CD
Treze	13	XIII	Quinhentos .	500	D
Quatorze ...	14	XIV	Seiscentos ..	600	DC
Quinze	15	XV	Setecentos ..	700	DCC
Dezesseis ...	16	XVI	Oitocentos ..	800	DCCC
Dezessete ...	17	XVII	Novecentos .	900	CM
Dezoito	18	XVIII	Mil	1000	M
Dezenove ...	19	XIX	Milhão	1000000	$\overline{M}$

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

20. As operações fundamentais da Aritmética são quatro, que se denominam **Adição, Subtração, Multiplicação** e **Divisão.** Chamam-se fundamentais, porque servem de base para efetuar tôdas as outras operações aritméticas.

Estas quatro operações resolvem os seguintes casos:

1.° *Dados dois ou mais números, achar a sua soma;*

2.° *Dados dois números, achar a sua diferença;*

3.° *Dados dois fatôres, achar o seu produto;*

4.° *Dados dois números, achar quantas vêzes o menor está contido no maior.*

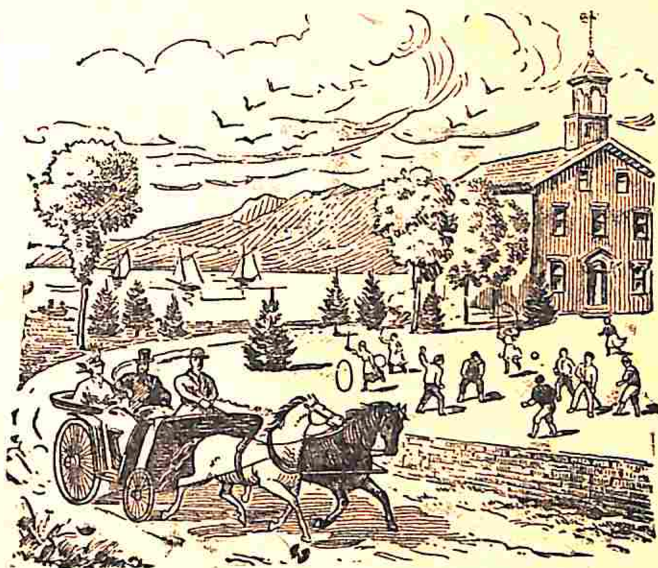
21. Os sinais que indicam as quatro operações fundamentais são os seguintes:

O sinal de adição é + que se lê: *mais.*
O sinal de subtração é — que se lê: *menos.*
O sinal de multiplicação é × que se lê: *multiplicado por.*
O sinal de divisão é ÷ que se lê: *dividido por.*

22. Os diversos números com que temos de calcular, são a soma ou o conjunto de duas ou mais unidades simples que se agrupam em um só todo, como vemos nos exemplos seguintes:

								1
							1	1
						1	1	1
					1	1	1	1
				1	1	1	1	1
			1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	—	—	—	—	—	—	—	—
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9

———



Tábua da adição

2 + 1 = 3 2 + 2 = 4 2 + 3 = 5 2 + 4 = 6 2 + 5 = 7 2 + 6 = 8 2 + 7 = 9 2 + 8 = 10 2 + 9 = 11 2 + 10 = 12	3 + 1 = 4 3 + 2 = 5 3 + 3 = 6 3 + 4 = 7 3 + 5 = 8 3 + 6 = 9 3 + 7 = 10 3 + 8 = 11 3 + 9 = 12 3 + 10 = 13	4 + 1 = 5 4 + 2 = 6 4 + 3 = 7 4 + 4 = 8 4 + 5 = 9 4 + 6 = 10 4 + 7 = 11 4 + 8 = 12 4 + 9 = 13 4 + 10 = 14	5 + 1 = 6 5 + 2 = 7 5 + 3 = 8 5 + 4 = 9 5 + 5 = 10 5 + 6 = 11 5 + 7 = 12 5 + 8 = 13 5 + 9 = 14 5 + 10 = 15
6 + 1 = 7 6 + 2 = 8 6 + 3 = 9 6 + 4 = 10 6 + 5 = 11 6 + 6 = 12 6 + 7 = 13 6 + 8 = 14 6 + 9 = 15 6 + 10 = 16	7 + 1 = 8 7 + 2 = 9 7 + 3 = 10 7 + 4 = 11 7 + 5 = 12 7 + 6 = 13 7 + 7 = 14 7 + 8 = 15 7 + 9 = 16 7 + 10 = 17	8 + 1 = 9 8 + 2 = 10 8 + 3 = 11 8 + 4 = 12 8 + 5 = 13 8 + 6 = 14 8 + 7 = 15 8 + 8 = 16 8 + 9 = 17 8 + 10 = 18	9 + 1 = 10 9 + 2 = 11 9 + 3 = 12 9 + 4 = 13 9 + 5 = 14 9 + 6 = 15 9 + 7 = 16 9 + 8 = 17 9 + 9 = 18 9 + 10 = 19

ADIÇÃO

23. Somar é reunir as unidades de dois ou mais números em um número só. Os números que se somam, chamam-se **parcelas**, e o resultado da operação chama-se **soma**.

O sinal +, escrito entre dois números, mostra que êstes números se devem somar: assim, 2+3=5 lê-se: 2 *mais* 3 *igual a* 5.

24. Na operação de somar devemos conhecer os dois pontos seguintes:

1.° *Tôdas as parcelas de uma soma devem ser quantidades homogêneas, isto é, da mesma espécie de coisas.*

2.° *Seja qual fôr a ordem em que escrevermos as diversas parcelas, a soma será sempre a mesma.*

Ilustração. Não podemos reunir em um só número quantidades de espécies diferentes; assim 2 penas e 3 lápis não são nem 5 penas, nem 5 lápis; da mesma sorte, 2 unidades e 3 dezenas não são nem 5 unidades, nem 5 dezenas; por isso tôdas as parcelas de uma soma devem ser quantidades da mesma espécie.

Êstes dois pontos ficarão claramente ilustrados no seguinte problema:

Problema. Uma estante tem duas prateleiras; na de cima estão 4 livros deitados e 3 em pé; e na de baixo, estão 2 em pé e 3 deitados; quantos livros estão na estante?



Solução. Temos aqui quatro parcelas que somam

4 + 3 + 2 + 3 = 12 livros.

Tôdas estas parcelas são homogêneas, porque são da mesma espécie. A ordem em que adicionarmos estas parcelas, não influirá no resultado da operação, pois se começarmos a adição por outro qualquer canto da prateleira, a soma será sempre a mesma.

Problema. Em um cesto estão 232 laranjas, em outro 343 e em outro 122; se reunirmos tôdas estas laranjas em um só monte, qual será o seu número?

Solução. Escreveremos as três parcelas umas debaixo das outras, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em coluna. Debaixo da última parcela faremos um traço, e passaremos a somar a coluna das unidades. Então diremos: 2 e 3 são 5, e 2 são 7, que escreveremos debaixo das unidades. Passando às dezenas, diremos: 3 e 4 são 7, e 2 são 9, que escreveremos debaixo das dezenas. Passando às centenas, continuaremos: 2 e 3 são 5, e 1 são 6, que escreveremos debaixo das centenas. O número das laranjas reunidas será, pois, 697.

Operação

232	laranjas
343	laranjas
122	laranjas
697	laranjas

25. Quando a soma de uma coluna excede a 9, formam-se unidades superiores para juntar à coluna seguinte; assim, se uma coluna soma, por exemplo, 18, escrevem-se 8 debaixo dessa coluna, e, como as 10 restantes formam 1 unidade imediatamente superior, leva-se essa unidade para a coluna seguinte. Dêste modo se opera em tôdas as colunas e só na última se escreve a sua soma completa.

Problema. Qual é a soma de 337, 440, 96 e 208 ?

Solução. A soma da coluna das unidades é 21; ora 21 unidades contêm 2 dezenas e 1 unidade; escreveremos 1 debaixo das unidades e levaremos as 2 dezenas para a coluna das dezenas, que com elas soma 18 dezenas, que contêm 1 centena e 8 dezenas; escreveremos 8 debaixo das dezenas, e levaremos a centena para a coluna das centenas, que com ela soma 10; ora 10 centenas contêm 1 milhar exato, e, como não há centena nenhuma, escreveremos um zero debaixo das centenas, e levaremos o milhar para a ordem seguinte. A soma das quatro parcelas é 1081.

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
:	3	3	7
:	4	4	0
:		9	6
:	2	0	8
1	0	8	1

26. Prova. Há vários modos de tirar a prova a uma soma; a preferível é a seguinte, que tem o nome de prova real.

Passa-se um traço debaixo da soma, e repete-se a adição, escrevendo debaixo de cada coluna a sua soma completa. A soma da primeira coluna é 21 unidades, a soma da segunda é 16 dezenas ou 160 unidades e a soma da terceira é 9 centenas ou 900 unidades. Ora, juntando os três resultados, teremos um total igual à soma das mesmas parcelas.

Também se pode tirar a prova somando em outra ordem, por exemplo, de baixo para cima. Se a soma estiver certa o resultado deverá ser o mesmo.

```
   3 3 7
   4 4 0
     9 6
   2 0 8
 -------
 1 0 8 1
 -------
     2 1 }
   1 6 . }
   9 . . }
 -------
 1 0 8 1
```

Para se efetuar uma adição, há a seguinte

Regra: *Escrevem-se as diversas parcelas de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem umas debaixo das outras em coluna.*

Começa-se a adição pela coluna das unidades. Se a soma de uma coluna não excede a 9, escreve-se a soma debaixo dessa coluna, mas se excede a 9, escrevem-se debaixo dessa coluna as unidades que não formam uma unidade imediatamente superior, e as unidades formadas vão para a coluna seguinte; na última escreve-se a soma completa dessa coluna.

Prova. *Repete-se novamente a adição, pondo debaixo de cada coluna a sua soma completa, adicionam-se depois as somas obtidas, e, se o resultado fôr igual ao primeiro, a soma estará exata.*

Exercício de aplicação. Os alunos devem escrever e efetuar as seguintes somas:

1. 3 + 2 + 1 + 3 + 4 = 13
2. 5 + 3 + 2 + 4 + 2 = ?
3. 6 + 4 + 1 + 2 + 5 = ?
4. 8 + 3 + 5 + 6 + 3 = ?
5. 7 + 3 + 2 + 1 + 5 = ?

6. 8 + 6 + 5 + 7 + 3 + 2 = ?
7. 3 + 6 + 2 + 5 + 2 + 9 = ?
8. 9 + 3 + 7 + 5 + 1 + 5 = ?
9. 3 + 5 + 6 + 4 + 2 + 6 = ?
10. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ?

11. 2 + 3 + 6 + 5 + 3 + 6 + 3 + 5 + 3 + 4 = ?
12. 3 + 2 + 5 + 6 + 6 + 3 + 5 + 3 + 4 + 3 = ?
13. 9 + 4 + 5 + 2 + 1 + 6 + 0 + 5 + 3 + 8 = ?
14. 4 + 9 + 2 + 5 + 6 + 1 + 5 + 0 + 8 + 3 = ?
15. 8 + 7 + 6 + 3 + 2 + 9 + 3 + 5 + 0 + 9 = ?

(16.)	**(17.)**	**(18.)**	**(19.)**	**(20.)**
19 dias	30 livros	250 fôlhas	356 telhas	654 nozes
15 dias	43 livros	135 fôlhas	489 telhas	309 nozes
7 dias	53 livros	205 fòlhas	595 telhas	720 nozes
9 dias	28 livros	110 fôlhas	665 telhas	821 nozes
20 dias	85 livros	296 fòlhas	709 telhas	992 nozes
70 dias	livros	fòlhas	telhas	nozes

(21.)	**(22.)**	**(23.)**	**(24.)**	**(25.)**
4456	5834	45674	35	32541
3354	8305	56741	242	3265
5432	3056	67410	5427	638
8932	5962	74102	30546	49
5007	4831	41023	6328	220
3258	1750	10234	412	3758
3754	2735	32345	74	45043
34193				

(26.)	**(27.)**	**(28.)**	**(29.)**	**(03.)**
560	7500	15000	80900	1250
980	7950	16820	95890	800
750	8100	17360	99100	654
1220	8880	25830	100500	2380
2340	9500	29700	118500	4800
3580	9920	30810	136900	95
4660	10500	40500	159700	158
4000	11200	49600	180300	9000
5500	12040	50120	225400	286
23590				

Exercício de aplicação. Nestes problemas, os alunos devem escrever devidamente umas parcelas debaixo das outras, e depois somá-las.

31. Achar a soma de 15 + 26 + 18 + 91 + 17. Resp.?

32. Qual é a soma de 6798 + 5832 + 4761 + 8765? Resp.?

33. Qual é a soma de 135 + 1875 + 79 + 2005 + 253 + + 1935 + 101 + 12350 ? Resp.?

34. Qual é a soma de 25 + 1594 + 459 + 3935 + 100 + + 19510 + 1001 + 2532 ? Resp.?

35. Somar as seguintes parcelas: 45693, 98732, 98732, 69007, 35987 e 79005. Resp.?

36. Achar a soma dos seguintes números: 458 + 78952 + + 12583 + 293 + 1056 + 9879. Resp.?

37. Somar 895 + 75938 + 90075 + 79385 + 65 + 7525 + + 3205 + 1059. Resp. ?

38. Achar a soma dos seguintes números: 25960, 23880, 38000, 5750, 25210 e 12700. Resp.?

39. Somar as seguintes parcelas: 9750 + 3210 + 8900 + + 10520 + 820 + 25900 + 120000. Resp.?

40. Achar a soma de 750 + 1250 + 940 + 1720 + 2000 + + 3935 + 9730. Resp.?

41. Achar a soma de mil novecentos e vinte, mais trinta mil e seiscentos, mais cento e vinte e sete mil e duzentos, mais trinta e nove mil e duzentos e quarenta e quatro, mais mil e nove. Resp.?

42. Somar as seguintes parcelas: dois mil novecentos e trinta, cinco mil seiscentos e quarenta e cinco, vinte mil novecentos e trinta e seis, e nove mil setecentos e doze. Resp.?

43. Qual é a soma de todos os números consecutivos desde 987 até 1001, incluindo êstes dois números? Resp. 14910.

44. Achar a soma de todos os números consecutivos desde 3267 até 3281, incluindo êstes dois números. Resp. 49110.

Problemas para resolver

1. Comprei um aparelho de rádio por 2400 cruzeiros; um piano por 6000 cruzeiros; um carro por 9500 cruzeiros e um relógio por 3600 cruzeiros; em quanto importaram estas compras ?

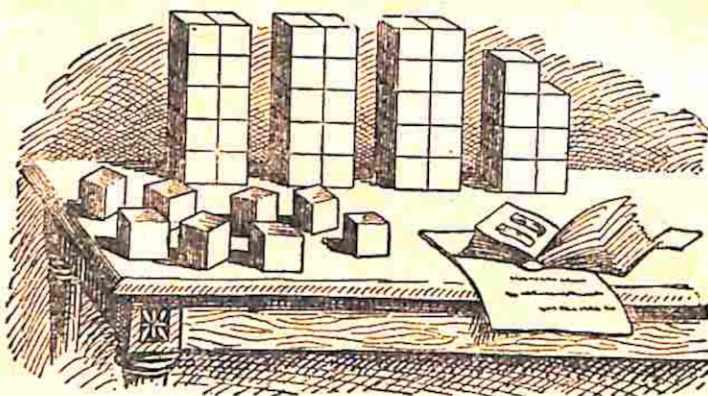
Solução. Somando as quatro parcelas, acharemos que o importe das compras é 21.500 cruzeiros.

Rádio	2.400	cruzeiros
Piano	6.000	"
Carro	9.500	"
Relógio ...	3.600	"
	21.500	"

2. Um homem tem mais 15 anos do que sua mulher; e esta tem mais 20 anos do que seu filho, que apenas conta 16 anos; qual é a idade do homem e qual a da mulher ?

Solução. O filho tendo 16 anos, a mãe, tendo mais 20, deve ter 36 anos; e o pai, que tem mais 15 do que a mulher, deve ter 36 + 15 = 51 anos.

16 + 20 = 36, idade da mulher
36 + 15 = 51. idade do homem



3. Sôbre uma mesa estão 3 pilhas com 10 cubos cada uma; está outra com 7, e mais 8 cubos espalhados; quantos cubos estão sôbre a mesa ? Resp. ?

4. Uma pessoa comprou uma lata de manteiga por 10 cruzeiros; um queijo por 7 cruzeiros; uma lata de morangos por 4 cruzeiros; um quilo de passas por 13 cruzeiros; em quanto importaram êstes gêneros ? Resp. 34 cruzeiros.

5. Certo negociante vendeu 3004 quilos de café; depois vendeu mais 625 kg. e, finalmente, mais 1926 kg.; quantos quilos vendeu êle ? Resp. 5555.

6. Qual é a soma dos valores das sete letras dos algarismos romanos, I, V, X, L, C, D e M ? Resp. 1666.

7. Comprei um cavalo por 450 cruzeiros; por quanto o devo vender para ganhar 40 cruzeiros ? Resp. ?

8. Antônio tem 20 laranjas e João tem 13 mais do que Antônio; quantas laranjas tem João? Resp.?

3. Um homem tinha 29 anos, quando nasceu seu primeiro filho; quando êste chegou à idade de 25 anos, casou-se; qual era então a idade do pai? Resp.?

10. Uma mulher tem 6 galinhas pondo ovos; uma já tem 9 no ninho, outra 11, outra 16, outra 4, outra 7, e a última 10; quantos ovos pode juntar a mulher? Resp.?

11. Dois irmãos têm 25 carneiros cada um, e seu pai tem 15 mais do que ambos; quantos carneiros tem o pai? Resp.?

12. Um homem, ao morrer, deixou em testamento os seguintes legados: 3800 cruzeiros a seu irmão; 1785 cruzeiros a cada um dos seus dois sobrinhos, e 4130 cruzeiros à sobrinha; quanto deixou êle? Resp. 11500 cruzeiros.

13. Comprei seis livros por 19 cruzeiros; uma resma de papel por 98 cruzeiros; cem envelopes por 7 cruzeiros e uma caixa de penas por 12 cruzeiros; em quanto importaram êstes objetos? Resp.?

14. Um exército no primeiro dia de marcha andou 18 quilômetros, no segundo andou 30, no terceiro 25, no quarto andou a metade da distância do primeiro dia, e no quinto andou 18 quilômetros; que distância percorreu êle nos 5 dias? Resp.?

15. João comprou certo número de peras, e deu 8 a sua mãe, 6 a sua irmã, 3 a um irmãozinho, e ficou com 7; quantas peras comprou? Resp.?

16. Uma pessoa nascida em 1843, em que ano fêz as suas 25 primaveras? Resp.?

17. Comprei 15 quilos de açúcar por 30 cruzeiros; comprei mais 8 quilos por 15 cruzeiros; comprei ainda 10 quilos por 22 cruzeiros; quantos quilos de açúcar comprei e em quanto importaram? Resp.?

18. Achar a soma das seis quantias seguintes: 40 cruzeiros, 32 cruzeiros, 75 cruzeiros e 28 cruzeiros. Resp.?

19. Três homens formaram uma sociedade comercial, para a qual o primeiro entrou com 4500 cruzeiros; o segundo entrou com 7500 cruzeiros, e o terceiro com uma quantia igual à dos dois primeiros sócios; qual era o capital da sociedade? Resp.?

20. Uma menina quis saber a soma dos anos de seus irmãos. Nenê tinha 2 anos, Nhonhô tinha 4, Cazuza tinha 8, Sinhá tinha 10 e ela tinha 12; quantos anos somavam estas idades? Resp.?

21. Uma pipa tinha 120 litros de vinho, adicionaram-lhe mais 99 litros e depois 171 litros; quantos litros de vinho ficou contendo a pipa? Resp.?



Tábua da subtração

2 — 2 = 0	3 — 3 = 0	4 — 4 = 0	5 — 5 = 0
3 — 2 = 1	4 — 3 = 1	5 — 4 = 1	6 — 5 = 1
4 — 2 = 2	5 — 3 = 2	6 — 4 = 2	7 — 5 = 2
5 — 2 = 3	6 — 3 = 3	7 — 4 = 3	8 — 5 = 3
6 — 2 = 4	7 — 3 = 4	8 — 4 = 4	9 — 5 = 4
7 — 2 = 5	8 — 3 = 5	9 — 4 = 5	10 — 5 = 5
8 — 2 = 6	9 — 3 = 6	10 — 4 = 6	11 — 5 = 6
9 — 2 = 7	10 — 3 = 7	11 — 4 = 7	12 — 5 = 7
10 — 2 = 8	11 — 3 = 8	12 — 4 = 8	13 — 5 = 8
11 — 2 = 9	12 — 3 = 9	13 — 4 = 9	14 — 5 = 9
6 — 6 = 0	7 — 7 = 0	8 — 8 = 0	9 — 9 = 0
7 — 6 = 1	8 — 7 = 1	9 — 8 = 1	10 — 9 = 1
8 — 6 = 2	9 — 7 = 2	10 — 8 = 2	11 — 9 = 2
9 — 6 = 3	10 — 7 = 3	11 — 8 = 3	12 — 9 = 3
10 — 6 = 4	11 — 7 = 4	12 — 8 = 4	13 — 9 = 4
11 — 6 = 5	12 — 7 = 5	13 — 8 = 5	14 — 9 = 5
12 — 6 = 6	13 — 7 = 6	14 — 8 = 6	15 — 9 = 6
13 — 6 = 7	14 — 7 = 7	15 — 8 = 7	16 — 9 = 7
14 — 6 = 8	15 — 7 = 8	16 — 8 = 8	17 — 9 = 8
15 — 6 = 9	16 — 7 = 9	17 — 8 = 9	18 — 9 = 9

SUBTRAÇÃO

27. Subtrair é tirar de um número as unidades de outro. O primeiro número, geralmente maior, chama-se **minuendo;** o outro chama-se **subtraendo,** e o resultado da subtração chama-se **resto.** O minuendo e o subtraendo são os *têrmos* da subtração.

O sinal — escrito entre dois números mostra que o segundo número se tem de subtrair do primeiro; assim, 3 — 2 = 1 lê-se: *3 menos 2 igual a 1.*

Problema. Uma laranjeira tinha 15 laranjas, mas uma menina apanhou 6; quantas ficaram na árvore ?



Solução. De 15 laranjas tirando 6 restam 9. Neste problema, 15 é o minuendo, 6 é o subtraendo e 9 é o resto. Somando o subtraendo e o resto, obtemos novamente o minuendo.

15 — 6 = 9   6 + 9 = 15

28. A subtração tem também por fim achar a diferença entre dois números, e neste caso, o resultado da operação chama-se **diferença.**

Problema. Artur tem 28 anos e sua irmã Laura tem 16; qual é a diferença entre as suas idades ?

Solução. Escreveremos o número maior como minuendo e o menor como subtraendo; começaremos depois a subtração pelas unidades, e diremos: 8 menos 6 são 2, que escreveremos debaixo das unidades. Nas dezenas, diremos: 2 menos 1 é 1, que escreveremos debaixo das dezenas. A diferença das duas idades é 12 anos.

Minuendo	28 anos
Subtraendo	16 anos
Diferença	12 anos

Exercício de aplicação. Nos seguintes exercícios, os algarismos do subtraendo são menores que os respectivos do minuendo.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)
32	36	548	234	7356	85617	95329
11	15	123	132	6240	72314	24218



Tábua da subtração

2 — 2 = 0	3 — 3 = 0	4 — 4 = 0	5 — 5 = 0
3 — 2 = 1	4 — 3 = 1	5 — 4 = 1	6 — 5 = 1
4 — 2 = 2	5 — 3 = 2	6 — 4 = 2	7 — 5 = 2
5 — 2 = 3	6 — 3 = 3	7 — 4 = 3	8 — 5 = 3
6 — 2 = 4	7 — 3 = 4	8 — 4 = 4	9 — 5 = 4
7 — 2 = 5	8 — 3 = 5	9 — 4 = 5	10 — 5 = 5
8 — 2 = 6	9 — 3 = 6	10 — 4 = 6	11 — 5 = 6
9 — 2 = 7	10 — 3 = 7	11 — 4 = 7	12 — 5 = 7
10 — 2 = 8	11 — 3 = 8	12 — 4 = 8	13 — 5 = 8
11 — 2 = 9	12 — 3 = 9	13 — 4 = 9	14 — 5 = 9
6 — 6 = 0	7 — 7 = 0	8 — 8 = 0	9 — 9 = 0
7 — 6 = 1	8 — 7 = 1	9 — 8 = 1	10 — 9 = 1
8 — 6 = 2	9 — 7 = 2	10 — 8 = 2	11 — 9 = 2
9 — 6 = 3	10 — 7 = 3	11 — 8 = 3	12 — 9 = 3
10 — 6 = 4	11 — 7 = 4	12 — 8 = 4	13 — 9 = 4
11 — 6 = 5	12 — 7 = 5	13 — 8 = 5	14 — 9 = 5
12 — 6 = 6	13 — 7 = 6	14 — 8 = 6	15 — 9 = 6
13 — 6 = 7	14 — 7 = 7	15 — 8 = 7	16 — 9 = 7
14 — 6 = 8	15 — 7 = 8	16 — 8 = 8	17 — 9 = 8
15 — 6 = 9	16 — 7 = 9	17 — 8 = 9	18 — 9 = 9

SUBTRAÇÃO

27. Subtrair é tirar de um número as unidades de outro. O primeiro número, geralmente maior, chama-se **minuendo;** o outro chama-se **subtraendo,** e o resultado da subtração chama-se **resto.** O minuendo e o subtraendo são os *têrmos* da subtração.

O sinal — escrito entre dois números mostra que o segundo número se tem de subtrair do primeiro; assim, 3 — 2 = 1 lê-se: *3 menos 2 igual a 1.*

Problema. Uma laranjeira tinha 15 laranjas, mas uma menina apanhou 6; quantas ficaram na árvore ?



Solução. De 15 laranjas tirando 6 restam 9. Neste problema, 15 é o minuendo, 6 é o subtraendo e 9 é o resto. Somando o subtraendo e o resto, obtemos novamente o minuendo.

15 — 6 = 9   6 + 9 = 15

28. A subtração tem também por fim achar a diferença entre dois números, e neste caso, o resultado da operação chama-se **diferença.**

Problema. Artur tem 28 anos e sua irmã Laura tem 16; qual é a diferença entre as suas idades ?

Solução. Escreveremos o número maior como minuendo e o menor como subtraendo; começaremos depois a subtração pelas unidades, e diremos: 8 menos 6 são 2, que escreveremos debaixo das unidades. Nas dezenas, diremos: 2 menos 1 é 1, que escreveremos debaixo das dezenas. A diferença das duas idades é 12 anos.

Minuendo	28 anos
Subtraendo	16 anos
Diferença	12 anos

Exercício de aplicação. Nos seguintes exercícios, os algarismos do subtraendo são menores que os respectivos do minuendo.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)
32	36	548	234	7356	85617	95329
11	15	123	132	6240	72314	24218

29. Quando o minuendo tiver algum algarismo inferior ao correspondente do subtraendo, opera-se do seguinte modo:

Problema. De 745 subtraindo 285, quanto resta?

Solução. Nas unidades, subtraindo 5 de 5, resta zero; escreveremos um zero debaixo das unidades. Nas dezenas, como não podemos tirar 8 de 4, tomaremos 1 centena das 7, e como 1 centena tem 10 dezenas, juntaremos as 10 com as 4, e então teremos 14. Agora, de 14 tirando 8, restam 6 que escreveremos debaixo das dezenas. Como já tiramos uma centena das 7, só restam 6; então 6 menos 2 são 4 que escreveremos debaixo das centenas. O resto da subtração é 460.

Quando se opera, diz-se simplesmente: 5 menos 5 nada; 14 menos 8 seis; 6 menos 2 quatro; e, ao mesmo tempo que se enuncia cada diferença, escreve-se debaixo da coluna correspondente.

A soma do subtraendo e do resto deve ser igual ao minuendo; realmente, somando, 285 com 460 obtemos 745, número igual ao minuendo. Êste processo é a prova da subtração.

```
(6) (14)
 7   4   5
 2   8   5
 ---------
 4   6   0

 2   8   5
 4   6   0
 ---------
 7   4   5
```

Para se efetuar uma subtração, há a seguinte

Regra: *Escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo ficando as unidades da mesma ordem em coluna.*

Começa-se a subtração pela ordem das unidades, e escreve-se o resto em baixo; se o algarismo de alguma ordem do minuendo fôr inferior ao da mesma ordem do subtraendo, juntam-se 10 ao minuendo, e considera-se a ordem seguinte do minuendo com 1 de menos.

Prova: *Adicionam-se o subtraendo e o resto; se a soma fôr igual ao minuendo, a subtração estará exata.*

Exercício de aplicação. O aluno fará as seguintes operações:

(**1.**) $8 - 5 + 7 - 6 + 3 - 2 - 3 + 9 - 5 + 4 = 10.$
(**2.**) $13 - 8 - 3 + 9 - 4 - 5 + 8 - 7 + 2 - 3 = ?$
(**3.**) $12 - 8 + 5 + 6 - 8 - 4 + 8 + 3 - 7 - 1 = ?$
(**4.**) $7 - 2 + 3 + 5 - 7 + 9 - 8 + 6 - 8 - 4 = ?$
(**5.**) $16 - 9 + 8 - 6 + 8 - 9 - 5 + 4 - 3 + 1 = ?$
(**6.**) $9 - 6 + 10 - 8 + 7 - 9 + 6 - 5 + 12 - 8 = ?$
(**7.**) $8 + 5 + 9 - 15 - 6 - 1 + 3 + 9 - 10 + 3 = ?$
(**8.**) $19 + 3 + 15 + 13 + 7 + 9 + 3 + 8 + 10 + 3 = ?$
(**9.**) $30 + 15 + 17 + 15 + 21 + 16 + 5 + 9 + 5 + 9 = ?$
(**10.**) $27 - 2 - 3 - 5 - 2 - 5 - 2 - 3 - 4 - 1 = 0.$

(**11.**)	(**12.**)	(**13.**)	(**14.**)
496 nozes	1375 telhas	8759 sacas	965566 litros
105 nozes	942 telhas	1281 sacas	709382 litros

Exercício de aplicação. Os discípulos devem escrever devidamente o subtraendo debaixo do minuendo, nas seguintes subtrações:

11.	279 — 165 = ?	**17.**	448326 — 75435 = ?
12.	9169 — 584 = ?	**18.**	735942 — 36754 = ?
13.	35253 — 795 = ?	**19.**	823542 — 654321 = ?
14.	89750 — 4594 = ?	**20.**	933004 — 823420 = ?
15.	78008 — 6835 = ?	**21.**	700000 — 99 = ?
16.	99875 — 7050 = ?	**22.**	90017 — 103 = ?

Problemas para resolver

1. Caminhavam 5 crianças para uma escola, mas duas adiantaram-se por andarem mais ligeiro; quantas ficaram atrás ?



Solução. De 5 tirando 2, restam 3.

2. Um negociante tinha uma peça de sêda com 45 metros; vendeu 19; quantos restaram? Resp.?

3. Dois meninos tinham 29 pêssegos; um dêles tinha 15; quantos tinha o outro ? Resp.?

4. Um homem comprou um cavalo por 3500 cruzeiros e vendeu-o por 4090 cruzeiros; quanto ganhou ? Resp.?

5. Uma senhora tem 36 anos, e sua filha tem 15; quantos anos é ela mais velha do que a filha ? Resp.?

6. Qual é a diferença entre 5994 e 4765 ? Resp.?

7. Que número se deve juntar a 5893 para fazer 6000 ? Resp.?

8. Um negociante devia 25875 cruzeiros; dando por conta 21384 cruzeiros quanto ficou devendo ? Resp.?

9. A independência do Brasil realizou-se em 1822, e a dos Estados Unidos em 1776; quantos anos decorreram de uma à outra independência ? Resp.?

10. O maior de dois números é 45, e a diferença entre êles é 14; qual é o número menor? Resp.?

11. Comprei um par de botinas por 132 cruzeiros, dei uma nota de 200 cruzeiros para fazer o pagamento; quanto devo receber de trôco ? Resp. 68 cruzeiros.

12. Comprei uma dúzia de camisas por 865 cruzeiros; uma dúzia de pares de meias por 96 cruzeiros, e uma dúzia de lenços de linho por 75 cruzeiros; dando uma nota de 1000 cruzeiros e outra de 500 cruzeiros para fazer o pagamento, quanto recebi de trôco ? Resp.?

Tábua da multiplicação

1 × 1 = 1 1 × 2 = 2 1 × 3 = 3 1 × 4 = 4 1 × 5 = 5 1 × 6 = 6 1 × 7 = 7 1 × 8 = 8 1 × 9 = 9 1 × 10 = 10	2 × 1 = 2 2 × 2 = 4 2 × 3 = 6 2 × 4 = 8 2 × 5 = 10 2 × 6 = 12 2 × 7 = 14 2 × 8 = 16 2 × 9 = 18 2 × 10 = 20	3 × 1 = 3 3 × 2 = 6 3 × 3 = 9 3 × 4 = 12 3 × 5 = 15 3 × 6 = 18 3 × 7 = 21 3 × 8 = 24 3 × 9 = 27 3 × 10 = 30	4 × 1 = 4 4 × 2 = 8 4 × 3 = 12 4 × 4 = 16 4 × 5 = 20 4 × 6 = 24 4 × 7 = 28 4 × 8 = 32 4 × 9 = 36 4 × 10 = 40
5 × 1 = 5 5 × 2 = 10 5 × 3 = 15 5 × 4 = 20 5 × 5 = 25 5 × 6 = 30 5 × 7 = 35 5 × 8 = 40 5 × 9 = 45 5 × 10 = 50	6 × 1 = 6 6 × 2 = 12 6 × 3 = 18 6 × 4 = 24 6 × 5 = 30 6 × 6 = 36 6 × 7 = 42 6 × 8 = 48 6 × 9 = 54 6 × 10 = 60	7 × 1 = 7 7 × 2 = 14 7 × 3 = 21 7 × 4 = 28 7 × 5 = 35 7 × 6 = 42 7 × 7 = 49 7 × 8 = 56 7 × 9 = 63 7 × 10 = 70	8 × 1 = 8 8 × 2 = 16 8 × 3 = 24 8 × 4 = 32 8 × 5 = 40 8 × 6 = 48 8 × 7 = 56 8 × 8 = 64 8 × 9 = 72 8 × 10 = 80
9 × 1 = 9 9 × 2 = 18 9 × 3 = 27 9 × 4 = 36 9 × 5 = 45 9 × 6 = 54 9 × 7 = 63 9 × 8 = 72 9 × 9 = 81 9 × 10 = 90	10 × 1 = 10 10 × 2 = 20 10 × 3 = 30 10 × 4 = 40 10 × 5 = 50 10 × 6 = 60 10 × 7 = 70 10 × 8 = 80 10 × 9 = 90 10 × 10 = 100	11 × 1 = 11 11 × 2 = 22 11 × 3 = 33 11 × 4 = 44 11 × 5 = 55 11 × 6 = 66 11 × 7 = 77 11 × 8 = 88 11 × 9 = 99 11 × 10 = 110	12 × 1 = 12 12 × 2 = 24 12 × 3 = 36 12 × 4 = 48 12 × 5 = 60 12 × 6 = 72 12 × 7 = 84 12 × 8 = 96 12 × 9 = 108 12 × 10 = 120

MULTIPLICAÇÃO

30. Multiplicar um número inteiro por outro é repetir o primeiro número tantas vêzes, quantas são as unidades do outro.

O número que se multiplica, chama-se **multiplicando;** o número pelo qual se multiplica, chama-se **multiplicador;** e o resultado da multiplicação, chama-se **produto.**

O multiplicando e o multiplicador chamam-se também **fatôres do produto.**

O sinal × escrito entre dois números mostra que êstes números devem ser multiplicados; assim, $3 \times 2 = 6$ lê-se: *3 multiplicado por 2 igual a 6*.

Problema. Um galho de cerejeira tem 7 cachos, e cada cacho tem 6 cerejas; quantas cerejas tem o galho ?



Solução. 1 cacho tem 6 cerejas; 2 cachos têm 2 vêzes 6; 3 cachos têm 3 vêzes 6; enfim 7 cachos têm 7 vêzes 6, que são 42 cerejas. O número 6 repete-se 7 vêzes, e por isso, 6 é o multiplicando; 7 é o multiplicador e 42 é o produto.

$$6 \times 7 = 42$$

Problema. Um tostão são 5 vinténs, 4 tostões quantos vinténs são ?

Solução. Um tostão são 5 vinténs, e 4 tostões são 4 vêzes 5 vinténs. Escreveremos 5 como multiplicando, e debaixo dêle escreveremos 4 como multiplicador, e depois diremos: 4 vêzes 5 são 20 que escrevemos como produto. Portanto 4 tostões são 20 vinténs.

Multiplicando .	**5**
Multiplicador ..	**4**
Produto	**20**

31. Multiplicar 5 por 4 é o mesmo que somar o número 5 quatro vêzes, pois 4 vêzes 5 é igual a $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Da mesma sorte, multiplicar 6 por 7 é somar o número 6 sete vêzes, pois 7 vêzes 6 é igual a $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$. A multiplicação é também um modo abreviado de somar números iguais.

Tabuada de Pitágoras

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Podemos obter o produto de dois números simples pela tabuada acima atribuída a Pitágoras. Basta procurar na 1.ª linha um fator e na 1.ª coluna o outro fator. No cruzamento da coluna com a linha está o produto.

Quando o multiplicando constar de mais de um algarismo, operaremos do seguinte modo:

Problema. Multiplicar 243 por 5.

Solução. Temos de multiplicar cada um dos algarismos do multiplicando por 5 que é o multiplicador. Começando pelas unidades, temos: 5 vêzes 3 são 15 unidades, que formam 1 dezena e 5 unidades. Escreveremos as 5 unidades debaixo das unidades e a dezena juntaremos com as dezenas que são 5 vêzes 4 ou 20 e 1, que veio das unidades, são 21. Ora, 21 dezenas são 2 centenas e 1 dezena; escreveremos 1 debaixo das dezenas e juntaremos as 2 centenas com as centenas; estas são 5 vêzes 2 ou 10, e 2 são 12, que escreveremos debaixo das centenas. O produto é 1215.

	Centenas	Dezenas	Unidades
	2	4	3
			5
1	2	1	5

Exercício de aplicação. Operar as seguintes multiplicações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Multiplicando......	129	2591	3285	6987	78198
Multiplicador.......	2	2	3	4	4
Produto........	258				

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
5780	6380	7490	8020	9260	11250	12825
4	5	5	6	6	7	7

13. 1816 × 7 = ?
14. 3061 × 8 =
15. 2203 × 8 =
16. 7213 × 9 =
17. 3545 × 9 =

18. 87632 × 7 = ?
19. 87652 × 6 =
20. 20504 × 5 =
21. 75319 × 4 =
22. 89897 × 3 =

23. 6580 × 2 = ?
24. 7750 × 3 =
25. 8330 × 4 =
26. 9180 × 5 =
27. 9910 × 6 =

32. Quando o multiplicador constar de mais de um algarismo, haverá tantas multiplicações quantos forem os algarismos do multiplicador; o resultado de cada multiplicação tem o nome de **produto parcial** e a soma de todos os produtos, o de **produto total.**

Problema. Multiplicar 458 por 234.

		(1.º)	(2.º)
		458	458
		234	234
Produto parcial das unidades	458 × 4..	1832	1832
Produto parcial das dezenas	458 × 30.	13740	1374
Produto parcial das centenas	458 × 200	91600	916
Produto total		107172	107172

Solução. Multiplica-se o multiplicando, primeiro pelas unidades do multiplicador, depois pelas dezenas e finalmente pelas centenas, e somados êstes três produtos parciais, tem-se 107172, que é o produto total.

Simplifica-se a operação, suprimindo-se os zeros das dezenas, centenas, etc., como se vê no 2.º modêlo.

Deve-se ter o cuidado de escrever o primeiro algarismo de cada produto debaixo do algarismo com que se está operando. Assim, no exemplo resolvido, 2 que é o primeiro algarismo do produto das unidades, escreve-se debaixo do 4, que é o multiplicador; 4 escreve-se debaixo de 3; 6 debaixo de 2, suprimindo-se as cifras.

Para se efetuar uma multiplicação, há a seguinte

Regra: *Escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em coluna, e sublinha-se.*

Se o multiplicador constar de um só algarismo, multiplica-se por êste o multiplicando, e o resultado será o produto. Se o multiplicando constar de mais de um algarismo, multiplica-se o multiplicando por cada um dos algarismos significativos do multiplicador, escrevendo o primeiro algarismo de cada produto parcial debaixo do algarismo multiplicador. A soma de todos os produtos parciais será o produto total.

33. Invertendo-se a ordem dos fatôres de uma multiplicação, e fazendo-se de novo a operação, o produto será o mesmo; Com efeito, multiplicar 10 por 8 é o mesmo que multiplicar 8 por 10; em ambos os casos, o produto é 80. Para se verificar, pois, se uma multiplicação está exata, pode-se usar da seguinte

Prova: *Inverte-se a ordem dos fatôres, pondo o multiplicando debaixo do multiplicador, e opera-se nova multiplicação. Se o resultado fôr igual ao primeiro, o produto estará exato.*

Exercício de aplicação. Operar as seguintes multiplicações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
Multiplicando...	23	32	45	54	67	76	89	98
Multiplicador...	11	11	12	12	13	13	14	14
Produto....								

Verificar a exatidão das seguintes multiplicações:

9. 126 × 15 = 1890
10. 208 × 16 = 3328
11. 235 × 18 = 4230
12. 346 × 19 = 6574
13. 425 × 29 = 12325
14. 518 × 34 = 17612
15. 279 × 37 = 10323
16. 869 × 49 = 42581
17. 123 × 123 = 15129
18. 342 × 364 = 124488
19. 376 × 526 = 197776
20. 476 × 536 = 255136
21. 2187 × 215 = 470205
22. 3489 × 276 = 962964
23. 1646 × 365 = 600790
24. 8432 × 635 = 5354320

Observações sôbre a multiplicação

34. Quando o multiplicador é 10, 100, 1000, etc., acrescentam-se ao multiplicando os zeros que contiver o multiplicador e estará concluída a multiplicação, com 8×10=80; 8×100=800; 8 × 1000 = 8000, etc.

35. Quando um ou ambos os fatôres terminam em zeros, multiplicam-se só os algarismos significativos, e acrescentam-se ao produto total os zeros que contiverem os dois fatôres, como se vê no exemplo ao lado.

```
    4500
    2500
--------
    225
    90
--------
11250000
```

Exercício de aplicação.

1. 254 × 10 = ?
2. 138 × 100 = ?
3. 428 × 1000 = ?
4. 872 × 100 = ?
5. 500 × 100 = ?

6. 8300 × 450 = ?
7. 1801 × 260 = ?
8. 3007 × 1100 = ?
9. 5038 × 2150 = ?
10. 8000 × 8000 = ?

36. Quando algum algarismo medial do multiplicador é zero, despreza-se êsse zero e passa-se a fazer a multiplicação com o algarismo seguinte, escrevendo-se o primeiro algarismo do produto debaixo do algarismo multiplicador, como se vê no exemplo ao lado.

```
    4562
    3005
--------
   22810
13686
--------
13708810
```

Exercício de aplicação.

1. Multiplicar 6538 por 207.	Resp. ?
2. Multiplicar 9805 por 1075.	" ?
3. Multiplicar 7614 por 6003.	" ?
4. Multiplicar 96532 por 504.	" ?
5. Multiplicar 86431 por 2030.	" ?
6. Multiplicar 90055 por 109.	" ?
7. Multiplicar 80570 por 208.	" ?
8. Multiplicar 75530 por 3002.	" ?
9. Multiplicar 70507 por 2300.	" ?
10. Multiplicar 88855 por 9000.	" ?

1. Sendo necessários 8 cravos para pregar uma ferradura, quantos cravos serão necessários para ferrar um cavalo nos quatro pés ?



Solução. Uma ferradura leva 8 cravos; 4 ferraduras levam 4 vêzes 8 que são 32 cravos.

2. Custando 1 metro de chita 2 cruzeiros, quanto devem custar 15 metros ? Resp. ?

3. Em quanto importam 12 frangos a 3 cruzeiros cada um ? Resp. ?

4. Uma hora tem 60 minutos; 11 horas quantos minutos têm ?

5. Multiplicar 2029 por 1007. Resp. 2043203.

6. Um fazendeiro tinha 12 rebanhos, e em cada rebanho havia 97 carneiros; quantos carneiros possuía o fazendeiro ? Resp. ?

7. Ganhando um homem 25 cruzeiros por dia, quanto ganhará em 49 dias ? Resp. ?

8. Se uma família gasta 925 cruzeiros por mês, quanto gastará em um ano ? Resp. ?

9. Comprei 25 livros a 4 cruzeiros cada um; em quanto importaram ? Resp. ?



10. Uma menina sentada em uma redouça, dá 28 balanços por minuto; em um quarto de hora, quantos balanços dará? Resp. 420.

11. A velocidade do som é de 340 metros por segundo; em 19 segundos, que distância percorrerá o som ? Resp. 6.460.

12. Achar os vários produtos da nota abaixo e somá-los

2	*Quilos de manteiga ....*	*a*	32 *cruzeiros*	64 *cruzeiros*
8	*Ditos de carne sêca .....*	*a*	25 "	120 "
7	*Queijos de Minas .....*	*a*	20 "	140 "
10	*Linguas do Rio Grande*	*a*	25 "	250 "
3	*Quilos de chá da India*	*a*	80 "	240 "
8	*Ditos de café moído ...*	*a*	12 "	96 "
15	*Ditos de toucinho .....*	*a*	18 "	270 "
7	*Ditos de macarrão .....*	*a*	6	42 "
	soma			1.222 *cruzeiros*



Tábua da divisão

2 ÷ 2 = 1 4 ÷ 2 = 2 6 ÷ 2 = 3 8 ÷ 2 = 4 10 ÷ 2 = 5 12 ÷ 2 = 6 14 ÷ 2 = 7 16 ÷ 2 = 8 18 ÷ 2 = 9 20 ÷ 2 = 10	3 ÷ 3 = 1 6 ÷ 3 = 2 9 ÷ 3 = 3 12 ÷ 3 = 4 15 ÷ 3 = 5 18 ÷ 3 = 6 21 ÷ 3 = 7 24 ÷ 3 = 8 27 ÷ 3 = 9 30 ÷ 3 = 10	4 ÷ 4 = 1 8 ÷ 4 = 2 12 ÷ 4 = 3 16 ÷ 4 = 4 20 ÷ 4 = 5 24 ÷ 4 = 6 28 ÷ 4 = 7 32 ÷ 4 = 8 36 ÷ 4 = 9 40 ÷ 4 = 10	5 ÷ 5 = 1 10 ÷ 5 = 2 15 ÷ 5 = 3 20 ÷ 5 = 4 25 ÷ 5 = 5 30 ÷ 5 = 6 35 ÷ 5 = 7 40 ÷ 5 = 8 45 ÷ 5 = 9 50 ÷ 5 = 10
6 ÷ 6 = 1 12 ÷ 6 = 2 18 ÷ 6 = 3 24 ÷ 6 = 4 30 ÷ 6 = 5 36 ÷ 6 = 6 42 ÷ 6 = 7 48 ÷ 6 = 8 54 ÷ 6 = 9 60 ÷ 6 = 10	7 ÷ 7 = 1 14 ÷ 7 = 2 21 ÷ 7 = 3 28 ÷ 7 = 4 35 ÷ 7 = 5 42 ÷ 7 = 6 49 ÷ 7 = 7 56 ÷ 7 = 8 63 ÷ 7 = 9 70 ÷ 7 = 10	8 ÷ 8 = 1 16 ÷ 8 = 2 24 ÷ 8 = 3 32 ÷ 8 = 4 40 ÷ 8 = 5 48 ÷ 8 = 6 56 ÷ 8 = 7 64 ÷ 8 = 8 72 ÷ 8 = 9 80 ÷ 8 = 10	9 ÷ 9 = 1 18 ÷ 9 = 2 27 ÷ 9 = 3 36 ÷ 9 = 4 45 ÷ 9 = 5 54 ÷ 9 = 6 63 ÷ 9 = 7 72 ÷ 9 = 8 81 ÷ 9 = 9 90 ÷ 9 = 10

DIVISÃO

37. A divisão tem duas aplicações diversas que são:

1.° *Achar quantas vêzes um número contém outro;*
2.° *Dividir um número em partes iguais.*

38. O número que se divide, chama-se **dividendo;** o número pelo qual se divide, chama-se **divisor;** o resultado da operação chama-se **quociente**, e a quantidade que em algumas operações fica por dividir, chama-se **resto.**

39. De dois modos podemos indicar uma divisão, a saber:

1.° Escrevendo o divisor à direita do dividendo, separado por duas linhas, como: 8 | 2.

2.° Empregando o sinal da divisão, como: $8 \div 2 = 4$ que se lê *8 dividido por 2 igual a 4.*

40. Primeira aplicação. Com 12 cruzeiros quantos livros podemos comprar do preço de 3 cruzeiros cada um?

Solução. Êste problema tem por fim achar quantas vêzes 3 cruzeiros estão contidos em 12 cruzeiros. Ora, 2 vêzes 3 são 6, 3 vêzes 3 são 9, e 4 vêzes 3 são 12; logo, 12 cruzeiros contêm 4 vêzes 3 cruzeiros, e por isso com 12 cruzeiros podemos comprar 4 livros de 3 cruzeiros cada um.

```
12 | 3
00   4
```

Nesta aplicação, como o dividendo e o divisor são quantidades da mesma espécie, podemos chegar ao mesmo resultado por meio da subtração.

Ilustração. Se escrevermos 12 zeros em linha, e depois formos subtraindo três a três, no fim de quatro subtrações, não restará zero algum porque 12 zeros contém 4 vêzes 3 zeros.

000,000,000,000

41. Segunda aplicação. Dividindo-se 12 cruzeiros por 4 pessoas, que quantia receberá cada uma?

Solução. Êste problema tem por fim, dividir 12 cruzeiros em partes iguais. Ora, dividindo-se um número por 2, encontram-se duas partes iguais; dividindo-se por 3, encontram-se 3 partes iguais; dividindo-se por 4, encontram-se 4 partes iguais, etc. Logo, dividindo-se 12 cruzeiros por 4, teremos uma das 4 partes, que é 3 cruzeiros.

```
12 cruzeiros | 4
00             3 cruzeiros
```

Nesta aplicação, como o dividendo e o divisor são quantidades heterogêneas, isto é, o dividendo é dinheiro e o divisor

é um número abstrato; por isso não empregamos a subtração.

Problema. Dividir 8924 por 4.

Solução. Nesta divisão, temos 8 milhares, 9 centenas, 2 dezenas e 4 unidades para dividir por 4. Começaremos a divisão pela primeira ordem da esquerda, isto é, dividindo 8 por 4: dá 2, que escreveremos no quociente, e então diremos: 2 vêzes 4 são 8, para 8 resta nada; escreveremos um zero debaixo do 8. Depois, 9 dividido por 4 dá 2, que escreveremos no quociente, e diremos: 2 vêzes 4 são 8, para 9 resta 1, que escreveremos debaixo do 9. Ora, esta centena de resto são 10 dezenas; juntando mais duas do dividendo fazem 12; e 12 dividido por 4 dá 3; finalmente, 4 dividido por 4 dá 1. O quociente é 2231.

Na prática, prefere-se ir descendo os algarismos do dividendo, como se vê no 2.º modêlo ao lado.

```
                (1)
Milhares Centenas Dezenas Unidades
8 9 2 4 | 4
0 1 0 0   2 2 3 1

                (2)
8 9 2 4 | 4
0 9       2 2 3 1
  1 2
    0 4
      0
```

42. Para sabermos quantas vêzes um número menor está contido em outro maior, buscaremos mentalmente o número que, multiplicado pelo menor, produza o maior, e será êsse o número de vêzes.

Problema. Em 36 quantas vêzes há 4?

Solução. Há 9 vêzes, porque 9 vêzes 4 são 36.

Exercício oral:

Em 16 quantas vêzes há 4?
Em 18 quantas vêzes há 6?
Em 20 quantas vêzes há 5?
Em 24 quantas vêzes há 6?
Em 35 quantas vêzes há 7?
Em 40 quantas vêzes há 8?
Em 42 quantas vêzes há 7?
Em 48 quantas vêzes há 8?
Em 50 quantas vêzes há 5?
Em 54 quantas vêzes há 6?
Em 56 quantas vêzes há 8?
Em 60 quantas vêzes há 6?
Em 72 quantas vêzes há 8?
Em 81 quantas vêzes há 9?
Em 90 quantas vêzes há 9?
Em 100 quantas vêzes há 10?

Exercício de aplicação. Operar as seguintes divisões:

1.	$124 \div 2 = 62$	**9.**	$226 \div 2 = ?$	**17.**	$254328 \div 2 = ?$
2.	$237 \div 3 = 79$	**10.**	$354 \div 3 =$	**18.**	$753579 \div 3 =$
3.	$348 \div 4 = 87$	**11.**	$284 \div 4 =$	**19.**	$237484 \div 4 =$
4.	$435 \div 5 = 87$	**12.**	$890 \div 5 =$	**20.**	$653285 \div 5 =$
5.	$534 \div 6 = 89$	**13.**	$996 \div 6 =$	**21.**	$783264 \div 6 =$
6.	$1554 \div 7 = 222$	**14.**	$1498 \div 7 =$	**22.**	$863814 \div 7 =$
7.	$2136 \div 8 = 267$	**15.**	$2560 \div 8 =$	**23.**	$1536888 \div 8 =$
8.	$3618 \div 9 = 402$	**16.**	$5526 \div 9 =$	**24.**	$2532132 \div 9 =$

Divisão com resto

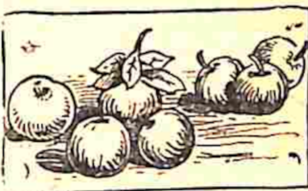
43. Quando o divisor dividir exatamente o dividendo, a divisão ficará completa, mas, quando não o dividir exatamente, ficará sempre um resto na divisão.

Até aqui temos só praticado a divisão exata; agora passaremos à divisão com resto.

Problema. Dividindo-se 7 maçãs por 2 meninos, quantas maçãs receberá cada um ?

Solução. 7 dividido por 2 dá 3, e fica 1 de resto; logo, cada menino receberá 3 maçãs, e ficará 1 maçã por dividir.

```
7 | 2
1   3
```



Nada mais podemos adiantar agorar sôbre o resto sem entrarmos na teoria das frações, matéria que ainda desconhecemos; quando, porém, chegarmos a êsse ponto. ali aprenderemos também a dividir o resto para completar o quociente.

44. O resto de uma divisão deve ser sempre menor do que o divisor; se fòr igual ou maior, a operação está errada.

Exercício de aplicação. Divisões com resto:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
9 ÷ 2 = ?	51 ÷ 7 = ?	101 ÷ 4 = ?	925 ÷ 9 =
14 ÷ 3 =	67 ÷ 8 =	126 ÷ 5 =	1253 ÷ 2 =
22 ÷ 3 =	78 ÷ 9 =	185 ÷ 6 =	4382 ÷ 3 =
37 ÷ 5 =	81 ÷ 2 =	200 ÷ 7 =	5325 ÷ 4 =
40 ÷ 6 =	98 ÷ 3 =	724 ÷ 9 =	6258 ÷ 5 =
41 ÷ 7 =	99 ÷ 4 =	725 ÷ 4 =	6259 ÷ 4 =
44 ÷ 8 =	100 ÷ 3 =	730 ÷ 7 =	6333 ÷ 5 =

Divisor com mais de um algarismo

45. Quando o divisor constar de mais de um algarismo, separam-se no dividendo tantos algarismos quantos tiver o divisor, e ainda mais um, se o número separado no dividendo fôr inferior ao divisor.

(1º)	(2º)	(3º)
4'3'3 | 18	3'6'4'5'6 | 2564	1'2'3'4 1 | 25

Ilustração. No primeiro exemplo, separam-se dois algarismos; no segundo exemplo, separam-se quatro algarismos; e no terceiro exemplo, separam-se três algarismos, porque 12 é menor do que 25.

Antes de operarmos uma divisão já podemos saber quantos algarismos terá o quociente. Para isto, bastará só contar os

algarismos do dividendo a partir do último algarismo marcado para a direita, e o número de algarismos que ali houver, será o número de algarismos do quociente. Assim, o quociente do primeiro exemplo terá só dois algarismos; o do segundo também terá dois, e do terceiro terá três.

Problema. Dividir 5398 por 13.

Solução. Temos de dividir 5 milhares, 3 centenas, 9 dezenas e 8 unidades por 13, e como não podemos dividir 5 milhares por 13, temos de tomar mais outra ordem; ficam, então, 53 centenas que já podemos dividir por 13. Em 53 quantas vêzes há 13? Há 4, escreveremos 4 no quociente, e multiplicando êste algarismo pelo divisor, temos 4 × 13 = 52 que, subtraído do dividendo, deixa 1 de resto.

Descendo agora o algarismo seguinte, temos 19 para novo dividendo, e procedendo-se como acima, depois de três divisões continuadas, achamos que o quociente da divisão é 415, e que ficam 3 de resto.

Prova. Multiplicando agora o quociente pelo divisor, e ao produto juntando o resto da divisão, obtemos exatamente o dividendo, pois (415 × 13) + 3 = = 5398.

Operação

```
5 3 9 8 | 1 3
5 2      -------
---       4 1 5
  1 9
  1 3
  ---
    6 8
    6 5
    ---
      3
```

Na prática da divisão obedece-se à seguinte

Regra: *Escreve-se o divisor à direita do dividendo, separado por um risco, sublinha-se o divisor, e sob êste escreve-se o quociente.*

Separam-se no dividendo a começar da esquerda, tantos algarismos, quantos contém o divisor, e mais um ainda, se o número formado pelos algarismos separados fôr menor que o divisor. Êste número é o primeiro dividendo parcial.

Acham-se quantas vêzes o divisor está contido no primeiro dividendo parcial e assim obtém-se o primeiro algarismo do quociente.

Multiplica-se o divisor por êste algarismo e o produto subtrai-se do primeiro dividendo parcial; à direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo para formar um novo dividendo parcial. Procede-se com êste tal qual com o primeiro dividendo parcial e obtém-se o segundo algarismo do divisor. Assim se continua até o último algarismo do dividendo.

Prova: *Multiplica-se o divisor pelo quociente; junta-se ao produto o resto, se houver; se o resultado fôr igual ao dividendo, a divisão estará exata.*

Nota. Sendo algum dividendo parcial menor que o divisor, escreve-se um zero no quociente e desce-se mais um algarismo do dividendo total para o dividendo parcial.

Exercício de aplicação. Operar as seguintes divisões:

1. Dividir 48692 por 14 .... Resp. 3478
2. Dividir 48690 por 15 .... Resp. 3246
3. Dividir 33840 por 16 .... Resp. 2115
4. Dividir 42143 por 17 .... Resp. 2479
5. Dividir 81342 por 18 .... Resp. 4519
6. Dividir 76323 por 19 .... Resp. 4017

7. 85323 ÷ 21 = ?	**13.** 236412 ÷ 132 = ?
8. 62582 ÷ 43 = ?	**14.** 126072 ÷ 206 = ?
9. 23576 ÷ 56 = ?	**15.** 131976 ÷ 312 = ?
10. 31672 ÷ 74 = ?	**16.** 7654325 ÷ 96 = ?
11. 10206 ÷ 81 = ?	**17.** 3755123 ÷ 234 = ?
12. 14630 ÷ 95 = ?	**18.** 5555696 ÷ 974 = ?

46. Para se dividir um número por 10, 100. 1000, etc., bastará cortar à direita do dividendo tantos algarismos quantos forem os zeros do divisor; a parte que ficar à esquerda será o quociente, a que ficar à direita será o resto da divisão.

Problema. Dividir 745 por 100.

Solução. Como o divisor tem dois zeros, temos de cortar dois algarismos no dividendo, e então o quociente é 7, e o resto é 45.

$745 \div 100 = 7{,}45$

1. Dividir 4585 por 10 .... Resp. 458,5
2. Dividir 5800 por 100 .... Resp. 58
3. Dividir 9560 por 10 .... Resp. ?
4. Dividir 98000 por 1000 .... Resp. ?

47. Quando o dividendo e o divisor terminam em zeros, abrevia-se a operação cancelando igual número de zeros em ambos os têrmos.

Problema. Dividir 14400 por 800.

Solução. Cancelando duas cifras no dividendo e duas no divisor, temos de dividir 144 por 8, que dá o quociente 18.

```
144ØØ | 8ØØ
 64   | 18
  0
```

Demonstração. Se cancelarmos duas cifras no dividendo, é o mesmo que o dividirmos por 100; se cancelarmos duas cifras no divisor, é o mesmo que o dividirmos por 100. Ora, dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número. êstes dois têrmos conservam entre si a mesma relação. e por isso não se altera o valor do quociente.

Operar as seguintes divisões:

1. 5500 ÷ 500 = Resp. 11		**5.** 9480 ÷ 120 = Resp. ?	
2. 7200 ÷ 480 = Resp. ?		**6.** 14700 ÷ 700 = Resp. ?	
3. 7500 ÷ 150 = Resp. ?		**7.** 48600 ÷ 500 = Resp. ?	
4. 8000 ÷ 20 = Resp. ?		**8.** 87000 ÷ 150 = Resp. ?	

Problemas para resolver

1. Um menino achou quatro ninhos de rolinha, tendo cada um igual número de ovos; êle contou os ovos dos 4 ninhos, e achou que eram 28; quantos ovos tinha cada ninho ?



Solução. Os ovos eram 28, e os ninhos eram 4; então, cada ninho tinha 28 ÷ 4 = 7 ovos.

2. Há 36 laranjas para dividir por 12 meninas; quantas deve receber cada uma ? Resp. ?

3. Comprei 25 metros de fazenda por 200 cruzeiros, quanto me custou cada metro ? Resp. ?

4. Comprei 12 livros por 168 cruzeiros; quanto me custou cada livro ? Resp. ?

5. Uma caixa de água leva 1240 litros, e um regador leva apenas 20 litros; ora, estando a caixa cheia de água, quantos regadores poderá encher ? Resp. 62.

6. Se um quilo de uvas custa 4 cruzeiros, com 12 cruzeiros quantos quilos podemos comprar ? Resp. ?

7. Uma senhora dividiu 240 cruzeiros por 80 pobres, dando a todos esmola igual; quanto recebeu cada pobre? Resp. ?

8. Se um homem sega um campo em 42 dias, 7 homens em quantos dias o segarão ? Resp. 6 dias.

9. O dividendo é 4049160, o divisor é 12345; qual o quociente ? Resp. 328.

10. Comprei uma peça de renda por 180 cruzeiros; ora, tendo ela sòmente 12 metros, quanto me custou cada metro ? Resp. ?

11. Com uma fita metálica de 29 palmos de comprimento, fizeram-se 3 aros para um barril de vinho e ainda ficaram 2 palmos de fita; qual era a circunferência ou grossura do barril ?

Solução. Desde que ficaram 2 palmos de fita por enrolar, os 3 aros deviam ter só 27 palmos, e um só aro devia ter 27 ÷ 3, isto é, 9 palmos; o barril tinha, pois, 9 palmos de grossura.

12. Se uma família gasta 95 cruzeiros por dia, quanto gastará em 30 dias ? Resp. 2850 cruzeiros.

13. A soma das idades de dois irmãos é 30 anos; tendo o mais velho 16, qual é a idade do mais moço ? Resp. ?

14. O produto de uma multiplicação é 3250; o multiplicando é 50; qual é o multiplicador ? Resp. ?

15. Multiplicando-se a soma de 148 e 56 pela diferença que há entre êstes dois números e dividindo-se o produto por 23, qual é o quociente ? Resp. 816.

16. Dois viajantes partiram do mesmo lugar, caminhando em direções opostas; um andava 2 quilômetros por hora, e o outro andava 3; a que distância estava um do outro, no fim de 5 horas ? Resp. 25 quilômetros.

17. Se 3 homens ganham juntos 840 cruzeiros em 7 dias, quanto ganha cada um por dia ? Resp. ?

18. Numa adição aumentou-se uma parcela de 127 unidades e diminuiu-se outra de 58 unidades. Que alteração sofreu a soma ? Resp. ?

19. Numa subtração aumentou-se de 40 unidades o minuendo e de 38 o subtraendo. Que alteração sofreu o resto ?

20. Aumentei o minuendo de 85 unidades e reduzi de 22 unidades o subtraendo. Como ficou alterado o resto ? Resp. ?

21. O resto de uma divisão é 7. Qual passará a ser depois de se multiplicar o dividendo e o divisor por 3 ? Resp. ?

22. Numa multiplicação aumentamos de 3 unidades o multiplicador; que alteração sofrerá o produto ? Resp. ?

23. Numa divisão em que o divisor é 15 achou-se o resto maior possível. Se dobrarmos os dois têrmos da divisão qual passará a ser o resto ? Resp. ?

Achar uma ou mais partes de uma quantidade

48. Se dividirmos um número por 2, o quociente será um meio ou metade dêsse número; se o dividirmos por 3, o quociente será um têrço ou a têrça parte dêsse número; se o dividirmos por 4, o quociente será um quarto, ou a quarta parte, e assim por diante. De sorte que, para acharmos qualquer parte de uma quantidade, bastará dividi-la pelo número que dá a parte que queremos obter.

Problema. Quanto é dois têrços de 24 ?

Solução. Dividindo 24 por 3, temos a sua têrça parte ou um têrço, que é 8; dois têrços são, portanto, $8 \times 2 = 16$.

```
2 4 | 3
0 0   8
```

$8 \times 2 = 16$

Regra: *Divide-se a quantidade pelo divisor que dá a parte, e o quociente multiplica-se pelo número de partes.*

Exercício de aplicação. Quanto é

1. a metade de 3728 ?
2. um têrço de 147?
3. dois têrços de 444?
4. três quartos de 500?
5. a quinta parte de 505?
6. dois quintos de 100?
7. a sexta parte de 4476?
8. quatro sétimos de 2513?
9. dois oitavos de 5992?
10. a nona parte de 8793?

Nota. Os discípulos devem ser perfeitamente exercitados nesta espécie de cálculos, não só por serem muito necessários para os negócios triviais da vida, mas também porque os habilitarão a compreender melhor a teoria das frações.

Problema. Quanto custam 5 quilos e meio de metal a 44 cruzeiros cada quilo?

Solução. Se um quilo custa 44, 5 quilos devem custar 5 vêzes 44, que são 220. Meio quilo deve custar a metade de 44 que é 22: então os 5 quilos e meio devem custar 242 cruzeiros.

	44
	5
Cinco quilos =	220
Meio quilo =	22
	242

1. Em quanto importam 6 quilos e meio de queijo a 16 cruzeiros cada quilo ? Resp. ?

2. Ganhando um homem 34 cruzeiros por dia, quanto deve receber, trabalhando 18 dias e meio ? Resp. ?

3. Quanto é três quartos de uma dúzia ? Resp. ?

4. Quanto é dois quintos de cento ? Resp. ?

5. Quanto é a oitava parte de um milheiro ? Resp. ?

6. Em quanto importam 5 dúzias e 8 réguas a 60 cruzeiros a dúzia ? Resp. ?

Solução. 5 dúzias custam $60 \times 5 = 300$. Dividindo 60 por 12, temos o preço de 1 régua, que é 5 cruzeiros e o preço de 8 réguas é $5 \times 8 = 40$ cruzeiros. As 5 dúzias e 8 réguas importam em 340 cruzeiros.

	60
	5
5 dúzias =	300
8 réguas =	40
	340

7. Ganhando um operário 44 cruzeiros por dia, quanto se lhe tem de pagar, trabalhando 12 dias e três quartos? Resp. ?

8. Dividir o número 168 em 8 partes iguais e achar a soma de 7 dessas partes. Resp. 147.

9. Cinco dúzias e meia de ovos, quantos ovos são? Resp. ?

10. Três cestos tinham as seguintes quantidades de laranjas: o primeiro tinha um cento e a quarta parte de um cento; o segundo tinha um cento e quatro quintos de um cento, e o terceiro tinha nove décimos de um cento; quantas laranjas tinham os três cestos ? Resp. 395.

11. Se uma pipa de vinho custa 1.280 cruzeiros, quanto devem custar dois quintos de pipa ? Resp. ?

IGUALDADE ARITMÉTICA

49. Se, ao repartirmos jaboticabas entre meninos, dando uma a cada menino, cada um receber a sua jaboticaba e não sobrar jaboticada alguma, dizemos que *o número de jaboticabas é igual ao número de meninos*. Essa relação *igual a* é representada pelo sinal =. Se quisermos chamar abreviadamente j o número de jaboticabas e m o número de meninos, poderemos escrever

$$j = m$$

e teremos uma relação entre duas quantidades chamada *igualdade*.

A quantidade que fica à esquerda do sinal de igualdade, chama-se **primeiro membro,** e a que fica à direita, chama-se **segundo membro.** Exemplo:

(1.º membro) (2.º membro)

$$7 - 2 + 6 = 8 + 4 + 6 - 7$$

50. Num membro, cada parte antecedida do sinal + ou —, chama-se **têrmo.** O primeiro membro da igualdade acima tem três têrmos, e o segundo tem quatro. O primeiro número de um membro, quando não leva sinal, considera-se com o sinal +.

Os números que levam os sinais × ou ÷ não são têrmos, mas sim fatôres ou divisores dos têrmos.

Problema. Achar o resultado de $4 \times 3 + 7 \times 5 - 9 \times 3 + 18 \div 2 - 3 \times 5 = ?$

Solução. O problema é .... $4 \times 3 + 7 \times 5 - 9 \times 3 + 18 \div 2 - 3 \times 5 = ?$

Operando as multiplicações e divisões, temos .... $(12 + 35) - (27 + 9) - 15 = ?$

Ordenando os sinais .... $12 + 35 + 9 - 27 - 15 = ?$

Como subtrair 27 e depois 15 é o mesmo que subtrair a soma de 27 com 15, vem $56 - 42 = 14$.

Regra. *Efetuam-se primeiramente as multiplicações e divisões indicadas, e da soma dos números precedidos do sinal + subtrai-se a soma dos precedidos do sinal —.*

1. Operar $2 \times 8 + 8 \times 5 - 9 \times 3 + 16 \div 4 = ?$

Solução

$$2 \times 8 + 8 \times 5 - 9 \times 3 + 16 \div 4 = ?$$
$$16 + 40 - 27 + 4 = ?$$
$$60 - 27 = 33$$

2. Operar $5 + 12 \times 3 - 5 \times 4 - 25 \div 5 = ?$ Resp. 16.

3. Operar $68 + 35 - 27 + 56 - 39 + 2 = ?$ Resp. ?

4. Operar $26 \div 2 + 17 - 14 + 8 \times 3 = ?$ Resp. ?

5. Operar $18 \times 21 + 450 \div 30 - 11 \times 14 = ?$ Resp. ?

PROPRIEDADES DOS NÚMEROS

51. Os números, quanto à sua composição, dividem-se em primos e múltiplos.

Números primos são os que não podem ser divididos exatamente senão por si e por 1, como 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.; assim 19, por exemplo, só é divisível por 19 e por 1.

Números múltiplos (também chamados **compostos**) são os produtos de dois ou mais números diferentes da unidade e por isso podem ser divididos exatamente por êsses números. Assim, 6 é o produto de 2 vêzes 3 ou 3 vêzes 2, e por isso, além de ser divisível por si e por 1, como qualquer número, é também divisível por 2 e por 3. O número 10 é o produto de 2 vêzes 5 ou 5 vêzes 2, e por isso é divisível por 2 e por 5.

52. Dois números são primos entre si, quando nenhum número diferente da unidade os divide exatamente; assim 8 e 9 são números primos entre si, porque não há divisor, além de 1, que divida exatamente êstes dois números. Mas, nem 8, nem 9, separadamente, são primos, porque 8 é divisível por 2 e por 4; e 9 é divivsível por 3.

Achar os números primos

53. Pode-se achar fàcilmente todos os números primos até o número que se quiser, pelo método de crivo, inventado por Eratóstenes, sábio de Alexandria.

Êste método consiste em escrever uma série de números ímpares e depois cancelar ou riscar êstes números em uma certa ordem.

Problema. Achar todos os números primos até 53.

1, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~, ~~51~~, 53.

Solução. Como todos os números pares são múltiplos, excetuando o número 2, devemos procurar os números primos só entre os números ímpares. Para isso escreveremos todos os números ímpares até o número requerido no problema, que é 53; em seguida cancelaremos todos os números de três em três, começando depois do número 3. Ora, depois de 3, o terceiro número é 9, que se cancela. Depois de 9, o terceiro número é 15, que se cancela. Depois de 15, o terceiro número é 21, que se cancela, e assim por diante, até o último número.

Depois de cancelarmos de três em três, passaremos a cancelar de cinco em cinco, começando a contar depois do número cinco; e depois cancelaremos de sete em sete, começando depois do número 7.

Os números cancelados são números múltiplos de 3, 5, ou 7; e os números não cancelados são números primos. A êstes juntaremos mais o número 2, que, por ser par, não foi escrito acima.

Portanto todos os números primos até 53, são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53.

Para se operar conforme o crivo de Eratóstenes, há a seguinte

Regra: *Escreve-se em linha a série de números impares até o número requerido, e depois cancela-se em tôda a série cada terceiro número depois de 3; cada quinto número depois de 5; cada sétimo número depois de 7; cada undécimo número depois de 11, e fazendo o mesmo com os outros números primos.*

Os números cancelados serão números múltiplos, e os não cancelados serão números primos.

54. Podemos também saber se um número é ou não primo, dividindo-o sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, etc., até que o quociente seja igual ou menor do que o divisor; e, se em tôdas as divisões houver resto, o número será primo.

Problema. O número 127 é primo ou não?

Solução. Pelos caracteres da divisibilidade (66), já sabemos de antemão que êste número não é divisível por nenhum dos números primos, 2, 3, 5, 7 e 11. Dividindo-o agora por 13, o quociente 9 é menor do que o divisor 13, e há resto; então o número 127 é primo.

```
127 | 13
117   9
 10
```

NÚMEROS PRIMOS ATÉ 191

1	7	19	37	53	71	89	107	131	151	173
2	11	23	41	59	73	97	109	137	157	179
3	13	29	43	61	79	101	113	139	163	181
5	17	31	47	67	83	103	127	149	167	191

Divisibilidade dos números

55. Quando um número divide outro exatamente, isto é, sem deixar resto, chama-se **divisor** dêsse número. Assim 4 é divisor de 12, porque o divide exatamente.

O divisor de um número chama-se também **fator, sub-múltiplo** e **parte alíquota** dêsse número; de sorte que 2, 3,

4 e 6 são divisores, fatôres, submúltiplos e partes aliquotas de 12, porque cada um dêstes números divide exatamente o número 12.

Os números que se prestam a uma divisão exata, são só os números múltiplos; os primos, a não ser por si e por 1, são indivisiveis por qualquer outro número.

Caracteres de divisibilidade

56. Para sabermos se um número é ou não divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, ou 11, não é necessário efetuar a divisão, bastará sòmente conhecermos os seguintes caracteres da divisibilidade.

Por 2.

1.º *Todo número terminado em 0, 2, 4, 6 e 8 é divisível por 2.*

Ilustração. Todos os números terminados nestes algarismos são ou 2 ou múltiplos de 2, e por isso são divisíveis por 2. Os números ímpares, divididos por 2, deixam sempre resto. O número divisível por 2 chama-se **par**; o não divisível, **impar.**

Por 3.

2.º *Todo número cujos algarismos tenham uma soma divisivel por 3, é também divisivel por 3.*

Ilustração. A soma dos algarismos do número 147 é $1 + 4 + 7 = 12$. Ora, como 12 é divisível por 3, o número 147 também o é.

Por 4.

3.º *Todo número cujos dois últimos algarismos da direita formem um número múltiplo de 4, é também divisivel por 4.*

Ilustração. O número 328 é divisível por 4 porque o número 28, formado pelos seus dois últimos algarismos, é divisível por 4.

Por 5.

4.º *Toda número terminado em 5 ou 0 é divisivel por 5.*

Ilustração. Os números que terminam em 5 ou 0 são todos múltiplos de 5, como 10, 15, 20, 25 e 30, que são divisíveis por 5.

Por 6.

5.º *Todo número divisivel por 2 e por 3 é também divisível por 6.*

Ilustração. Como os números 2 e 3 são primos entre si (n. **62**), se um número fôr divisível por 2 e por 3, também será produto dêstes números, que é $2 \times 3 = 6$, como se pode verificar em 12, 18, 24, etc.

Por 8.

6.° *Todo número cujos três últimos algarismos da direita formem um número múltiplo de 8, é também divisível por 8.*

Ilustração. O número 47312 é divisível por 8 porque o número 312, formado pelos seus três últimos algarismos, é divisível por 8.

Por 9.

7.° *Todo número cujos algarismos tenham uma soma divisível por 9, é também divisível por 9.*

Ilustração. A soma dos algarismos do número 4356 é 4+3+5+6=18; ora, como 18 é divisível por 9, o número 4356 também o é.

Por 10.

8.° *Todo número terminado em zero é divisível por 10.*

Ilustração. Os números terminados em zero são 10 e os múltiplos de 10; assim, 30, 90, 180, são divisíveis por 10.

Por 11.

9.° *Um número é divisível por 11, quando a soma dos algarismos da ordem par é igual à soma dos algarismos da ordem ímpar, ou quando a diferença entre as duas somas é 11 ou múltiplo de 11.*

Ilustração. Começando pela direita de um número, o primeiro algarismo pertence à ordem ímpar, o segundo à ordem par; o terceiro à ordem ímpar, o quarto à ordem par, e assim por diante. No número 48642, a soma dos algarismos da ordem par é $4+8=12$, e a soma dos da ordem ímpar é $2+6+4=12$, e como as somas são iguais, o número é divisível por 11. São também divisíveis por 11 os números 7084, 82940, 518463, etc.

Exercício de aplicação. Achar os divisores dos seguintes números, aplicando os caracteres estudados acima.

	Números	Divisores		Números	Divisores
1.	75	3, 5	**6.**	645	?
2.	90	2, 3, 5, 9, 10	**7.**	975	?
3.	138	2, 3, 6	**8.**	4576	?
4.	309	3	**9.**	800	?
5.	3465	3, 5, 9, 11	**10.**	6666	?

11. Nos números abaixo estão vagos os lugares de certas ordens. Dizer que algarismos podem ocupar êsses lugares de modo que:

O número 27 45 seja divisível por 3; Resp. 0, 3, 6 e 9.
O número 132 7 seja divisível por 9;
O número 6 32 seja divisível por 11;
O número 154 2 seja divisível por 6;
O número 375 4 seja divisível por 4.

12. Qual o menor número a subtrair dos números

7546 para ter um múltiplo de 3 ? Resp. 1.
3584 para ter um múltiplo de 5 ? Resp. 4.
327 para ter um múltiplo de 4 ?
5839 para ter um múltiplo de 9 ?
75326 para ter um múltiplo de 10 ?
352397 para ter um múltiplo de 11 ?

13. Qual o menor número a somar aos números do exercício precedente para obterem-se os múltiplos que ali se pedem?

Decomposição dos números

57. Todo número que não seja primo pode ser decomposto em um produto de fatôres primos. Assim:

os fatôres primos de 15 são 3 e 5, porque 3 × 5 = 15;
os fatôres primos de 21 são 3 e 7, porque 3 × 7 = 21;
os fatôres primos de 35 são 5 e 7, porque 5 × 7 = 35;
os fatôres primos de 60 são 2, 2, 3, e 5, porque 2 × 2 × 3 × 5 = 60 e assim por diante.

Problema. Decompor o número 210 em fatôres primos.

Solução. Começa-se a operação, dividindo-se 210 pelo menor número primo, que o dividir exatamente. Dividindo-se 210 por 2, o quociente é 105; dividindo agora 105 por 3, o quociente é 35; dividindo 35 por 5, o quociente é 7, e dividindo 7 por 7, o quociente é 1. Os fatores de 210 são 2, 3, 5 e 7. Prova: 2 × 3 × 5 × 7 = 210.

Processo

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Para se acharem os fatôres primos de um número, há a seguinte

Regra: *Divide-se o número dado pelo menor número primo que o divida exatamente; divide-se o quociente pelo mesmo número primo ou por outro imediatamente maior que também o divida exatamente; e assim se continua até obter-se o quociente 1. Os vários divisores empregados serão os fatôres primos do número dado.*

Exercício de aplicação. Achar os fatores primos dos seguintes números:

1. de 12......	2, 2 e 3		**5.** de 39..............	?
2. de 18......	2, 3 e 3		**6.** de 66..............	?
3. de 26......	2 e 13		**7.** de 100..............	?
4. de 38......	2 e 19		**8.** de 337..............	?

Divisão por cancelamento

58. Divisão por cancelamento é o método de abreviar uma divisão, rejeitando os fatôres comuns ao dividendo e ao divisor.

A palavra cancelar em Aritmética significa passar riscos sôbre os algarismos escritos para os inutilizar, com $\not 1$, $\not 2$, $\not 3$, $\not 4$, $\not 5$, etc.

Como já vimos no n.º 57, dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número, não se altera o valor do quociente; então, decompondo-se mentalmente o dividendo e o divisor em seus fatores primos (n.º 68) e cancelando-se os fatores comuns aos dois têrmos, a divisão ficará logo operada.

59. Para se facilitar o cancelamento, escreve-se a divisão em forma de fração, escrevendo-se o dividendo em cima, e o divisor em baixo, separados por um traço.

Problema. Qual é o quociente de 42 dividido por 7 ?

Processo

$$\frac{42}{7}=\frac{6\times\not 7}{\not 7}=6$$

Solução. O número 42 decompõe-se em 7 vêzes 6 ou 6 vêzes 7; e como o fator 7 é comum a ambos os têrmos, cancela-se êste fator no dividendo e no divisor, e o quociente fica 6.

60. Quando um fator do dividendo e outro do divisor são exatamente divisíveis por um mesmo número, dividem-se por êsse número, cancelam-se e escrevem-se os quocientes nos seus respectivos lugares.

Problema. Multiplicar 45 por 6, e dividir o produto por 9 multiplicado por 3.

$$\frac{45\times 6}{9\times 3}=\frac{\overset{5}{\not 45}\times\overset{2}{\not 6}}{\underset{1}{\not 9}\times\underset{1}{\not 3}}=10$$

Solução. Podemos dividir 45 e 9 por 9. Então $45 \div 9 = 5$, e $9 \div 9 = 1$. Cancelam-se os dois números, e escrevem-se os quocientes 5 e 1 nos seus respectivos lugares. Podemos também cancelar 6 e 3 dividindo-se por 3. O produto dos dois fatores do dividendo é $5 \times 2 = 10$, e o resultado do divisor é $1 \times 1 = 1$, o quociente é $\frac{10}{1}$ ou 10.

Problema. Quantas laranjas, custando 40 réis cada uma, devemos dar por 5 maçãs de 160 réis cada uma ?

Solução. 5 maçãs a 160 réis importam em 5 vêzes 160 réis, e uma laranja custa 40 réis. Dividindo 5 vêzes 160 por 40, acharemos o número das laranjas. Cancelam-se os dois zeros, que é o mesmo que dividir ambos os têrmos por 10, e então ficam reduzidos a 16 e 4. Dividem-se ainda êstes dois têrmos por 4, e o resultado é $5 \times 4 = 20$ laranjas.

$$\frac{5 \times \overset{4}{\cancel{160}}}{\underset{1}{\cancel{40}}} = 20$$

Verificação. 5 maçãs a $160 = 800$.
20 laranjas a $40 = 800$.

Nota. Êste método, tem muita aplicação na regra de três e em outros processos aritméticos e por isso os discípulos devem exercitá-lo convenientemente.

1. Multiplicar 36 por 4, e dividir o produto por 9. Resp. 16.
2. Achar o valor $(24 \times 6) \div (12 \times 3)$ Resp. 4.
3. Achar o valor $\frac{6800}{850}$ Resp. 8
4. Em 37 vêzes 15 quantas vêzes há 5 ? Resp. 111.
5. Dividir $21 \times 11 \times 26$ por $13 \times 7 \times 2$. Resp. 33.
6. Quantas sacas de café, pesando cada uma 60 quilos, podemos dar por 50 sacas, pesando cada uma 42 quilos? Resp. 35.
7. Os fatôres do dividendo são 16, 4, 9 e 5; e os fatôres do divisor são 8, 9 e 10; qual é o quociente ? Resp. 4.
8. Um fazendeiro comprou 4100 porcos a 110 cruzeiros, e fêz o pagamento em cavalos ao preço de 4100 cruzeiros cada um; quantos cavalos devia dar para pagar os porcos? Resp. 110.
9. Perguntando-se a uma moça qual era a sua idade, ela respondeu: Se dividirdes o produto de 64 multiplicado por 14 pelo produto de 8 multiplicado por 4, tereis a minha idade. Resp. 28 anos.

Máximo divisor comum

61. Divisor comum a dois ou mais números é o número que divide a todos exatamente.

62. Máximo divisor comum a dois ou mais números é o maior número que os divide exatamente.

Dois números podem ter muitos divisores comuns; assim, 2, 4 e 8 são os divisores comuns de 16 e 24; mas 8 é o máximo divisor comum daqueles dois números.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciais **m. d. c.** para indicar máximo divisor comum.

Problema. Qual é o máximo divisor comum de 28 e 40 ?

Solução. Dividindo-se o número maior pelo menor, o quociente é 1 e o resto é 12.

Dividindo-se depois o número menor 28 pelo resto 12, o quociente é 2, e o resto é 4.

Dividindo-se ainda o resto 12 pelo resto 4, o quociente é 3, e o resto é zero. O divisor que não deixa resto é 4, e êle é o m. d. c. de 40 e 28.

Para se facilitar a divisão continuada, escrevem-se os quocientes em cima e os restos em baixo.

Processo

	1	2	3
40	28	12	4
12	4	0	

Regra: *Para se achar o* **m. d. c.** *de dois ou mais números divide-se o número maior pelo menor, em seguida divide-se êste primeiro divisor pelo primeiro resto e depois, o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante até a divisão não deixar resto. O divisor que não deixar resto, será o* **m. c. d.**

Nota. Se logo na primeira divisão não houver resto, o número menor será o **m. d. c.** Quando os dois números são primos entre si, como 15 e 16, o maior divisor comum é a unidade (n.º **62**).

Exercício de aplicação. Achar o máximo divisor comum:

1. de 12 e 16 Resp. 4
2. de 15 e 20 " 5
3. de 42 e 54 " 6
4. de 70 e 110 " 10
5. de 105 e 165 " 15
6. de 140 e 210 Resp. ?
7. de 60 e 90 " ?
8. de 231 e 273 " ?
9. de 247 e 323 " ?
10. de 285 e 465 " ?

Mínimo múltiplo comum

63. Chamam-se **múltiplos** de um número aos produtos dêste número pela série natural dos números, isto é, por 1, 2, 3, 4, etc. Assim:

Os múltiplos de 2 são 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc.

Os múltiplos de 3 são 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, etc.

Os múltiplos de 4 são 8, 12, 16, 20, 24, 28, etc., e assim por diante.

64. Dados vários números é fácil obter-se outro que seja múltiplo comum dos números dados; basta fazer-se o produto dêstes. Por exemplo: para obter-se um múltiplo comum de 4, 6, 8 e 12 basta fazer o produto 4 × 6 × 8 × 12, que dará 2304. Mas há outros números menores do que 2304 e que são múltiplos comuns de 4, 6, 8 e 12. Vejamos como se pode obter o menor dêsses múltiplos ao qual chamaremos **mínimo múltiplo comum.**

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número, que se pode dividir por êsses números sem deixar resto.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciais **m. m. c.** para indicarmos mínimo múltiplo comum.

Problema. Qual é o **m. m. c.** de 4, 6, 8 e 12 ?

Processo

4, 6, 8, 12	2
2, 3, 4, 6	2
1, 3, 2, 3	2
1, 3, 1, 3	3
1, 1, 1, 1	

$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

Solução. Escrevem-se os números 4, 6, 8 e 12 e sublinham-se. Acha-se depois o menor divisor que divida um ou mais dêstes números sem deixar resto. Ora, o menor divisor é 2 que pode dividir todos. Escreve-se 2 à direita dos números, e dividem-se por êle todos os números, pondo debaixo de cada um o seu quociente. Então diz-se 4, dividido por 2, dá 2; 6, dividido por 2, dá 3; 8, dividido por 2, dá 4; e 12, dividido por 2, dá 6. Os quocientes desta primeira divisão são 2, 3, 4 e 6. Passa-se um traço debaixo dêstes números e acha-se outra vez o menor divisor que divida um ou mais números sem deixar resto. Êsse divisor é ainda 2, que pode dividir três dos números. Escreve-se 2 à direita dos números, e por êle se dividem todos os que forem divisíveis, pondo debaixo de cada um o respectivo quociente. O número 3, como não é divisível por 2, passa inteiro para baixo, e teremos então os números 1, 3, 2, e 3. Como um dos números se pode ainda dividir por 2, escreveremos 2 à direita, como divisor, e por êle dividiremos êsse número; e como 3 não é divisível por 2, passa para baixo, e temos os números 1, 3, 1 e 3. Como resta só 3, escreve-se 3 à direita como divisor, e divide-se por êle, para que todos os quocientes sejam 1. Multiplicando-se agora todos os divisores, obtém-se o produto 24, que é o **m. m. c.** de 4, 6, 8 e 12.

Regra: *Para se achar o* **m. m. c.** *de dois ou mais números, escrevem-se os números dados em linha, separados por vírgulas e sublinham-se; acha-se depois o menor divisor que divida exatamente um ou mais dos números dados; escreve-se êsse à direita, e dividem-se por êle todos os números que forem divisíveis, escrevendo debaixo de cada um o respectivo quociente, e os números que não forem divisíveis, passam para a linha de baixo.*

Divide-se a nova linha de números pelo menor número que, pelo menos, divida um dos números, e assim se procede até que haja nos quocientes só o algarismo 1. O produto continuado de todos os divisores será o **m. m. c.**

Nota. Quando todos os números dados são dois a dois primos entre si, o **m. m. c.** dêsses números é o seu produto continuado. Assim o **m. m. c.** de 4, 5 e 7 é $4 \times 5 \times 7 = 140$.

Êste processo facilita consideràvelmente a redução de frações ao mínimo denominador comum, e por isso deve ser muito exercitado.

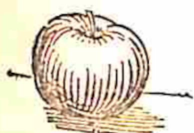
	Respostas
1. 15 e 20.	60
2. 6, 8 e 9.	72
3. 6, 15 e 35.	210
4. 10, 12 e 15.	60
5. 9, 15, 18 e 24.	?
6. 8, 15, 12 e 30.	?

	Respostas
7. 14, 21, 30 e 35.	?
8. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.	?
9. 18, 21, 27 e 36.	?
10. 16, 30, 40, 50 e 75.	?
11. 8, 28, 20, 24, 32 e 48.	?
12. 7, 14, 21, 28 e 35.	?

FRAÇÕES

65. Fração ou quebrado é uma ou mais partes iguais de uma unidade dividida em partes iguais.

Na linguagem vulgar, fração quer dizer um pedaço ou parte de alguma coisa.



Um inteiro,



Dois meios,



Três terços.



Quatro quartos,



Cinco quintos,



Seis sextos.

Ilustração. Uma unidade é uma coisa inteira como, por exemplo, uma maçã. Dividindo esta maçã em duas partes iguais, cada uma das partes é a metade ou **um meio** da maçã, e se escreve com algarismos $\frac{1}{2}$; as duas partes são dois meios, e se escrevem $\frac{2}{2}$. Dividindo a maçã em três partes iguais, cada parte é **um têrço** da maçã, e se escreve $\frac{1}{3}$; duas partes são dois têrços que se escrevem $\frac{2}{3}$; as três partes são três têrços ou a maçã inteira, e se escrevem $\frac{3}{3}$. Enfim, dividindo a maçã em quatro partes iguais, cada parte é **um quarto** que se escreve $\frac{1}{4}$; dividindo-a em cinco partes iguais, cada parte é **um quinto** que se escreve $\frac{1}{5}$; duas partes são $\frac{2}{5}$; três partes são $\frac{3}{5}$; quatro partes são $\frac{4}{5}$, e assim por diante.

66. Há duas espécies de frações que se denominam **frações ordinárias** e **frações decimais.** Aqui trataremos sòmente das frações ordinárias; no capítulo seguinte exporemos as decimais.

67. A fração ordinária compõe-se de dois números separados por um traço horizontal, como $\frac{2}{3}$. Êstes dois números chamam-se têrmos da fração. O têrmo de cima chama-se **numerador,** e o debaixo, **denominador.** O denominador mostra em quantas partes será dividida a unidade, e o numerador mostra o número de partes que tem a fração. Assim, $\frac{2}{3}$ quer dizer que a unidade foi dividida em 3 partes iguais, e se tomaram 2 dessas partes.

Numerador $\frac{2}{3}$ **Denominador**

Também se emprega o traço inclinado para separar os dois têrmos de uma fração; assim: 3/4, 2/7 etc.

68. Quando o denominador exceda a 10, lê-se o seu número juntamente com a palavra **avos,** como se vê nos seguintes exemplos:

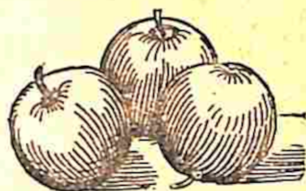
$\frac{1}{2}$ um meio	$\frac{2}{6}$ dois sextos	$\frac{4}{10}$ quatro décimos
$\frac{1}{3}$ um têrço	$\frac{3}{7}$ três sétimos	$\frac{8}{11}$ oito onze avos
$\frac{1}{4}$ um quarto	$\frac{5}{8}$ cinco oitavos	$\frac{9}{30}$ nove trinta avos
$\frac{1}{5}$ um quinto	$\frac{6}{9}$ seis nonos	$\frac{40}{90}$ quarenta noventa avos

Regra. *Para se enunciar uma fração, lê-se primeiro o numerador e depois o denominador com o nome ordinal até o número 10, e dêste número para cima dá-se-lhe o nome cardinal junto com a palavra avos.*

Exercício de aplicação. Os discípulos poderão agora ler sem dificuldade as seguintes frações:

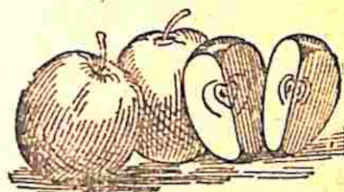
$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{16}{28}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{40}{90}$.

3/5, 3/6, 1/7, 2/9, 7/10, 11/16, 3/19, 7/25, 5/50, 9/60, 12/100.



69. A medida exata de uma quantidade exprime-se por meio de números inteiros e mistos, e a quantidade menor do que a unidade exprime-se por meio de uma fração.

Número inteiro é o que exprime uma ou mais unidades completas, como 3 maçãs.



Número misto é o que consta de inteiros e de uma fração; assim, 2 maçãs e dois quartos escrevem-se $2\frac{2}{4}$.

Frações próprias e impróprias

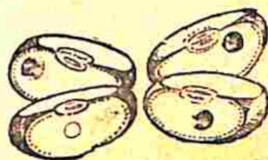
70. Se compararmos uma fração com a unidade, observaremos as seguintes relações:

1.º *Quando o numerador é igual ao denominador, o valor da fração é igual a* **um inteiro** *ou* **1.**

2.º *Quando o numerador é menor do que o denominador, o valor da fração é* **menor do que 1.** Neste caso, a fração se diz **própria.**

3.º *Quando o numerador é maior do que o denominador, o valor da fração é* **maior do que 1.** A fração, neste caso, se chama **imprópria.**

Ilustração. A figura ao lado ilustra estas relações. Dividindo uma maçã em 4 partes iguais, cada parte será $\frac{1}{4}$ da maçã. Se tomarmos as 4 partes, que são $\frac{4}{4}$, é evidente que tomamos a maçã inteira; logo $\frac{4}{4}$ são iguais a um inteiro e, do mesmo modo, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$ etc. são iguais a 1.



Se, em vez das 4 partes, tomarmos apenas 1, 2, ou 3 partes, não chegaremos a tomar a maçã inteira; as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, são, portanto, menores do que 1. São frações próprias, do mesmo modo que $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{10}{17}$, etc.

Finalmente, se quiséssemos tomar mais do que 4 das referidas partes para obter $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, etc., precisaríamos partir outras maçãs, o que significa que essas frações são maiores do que 1. As frações $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, etc. são portanto impróprias, do mesmo modo que $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{11}{9}$.

Exercicios orais de aplicação. 1.º O aluno dirá quanto falta a cada uma das seguintes frações para completar a unidade.

1. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{15}$.

2. $\frac{15}{16}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{20}{21}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{35}{40}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{25}{50}$, $\frac{90}{100}$.

2.º O aluno dirá quanto excede à unidade cada uma das seguintes frações:

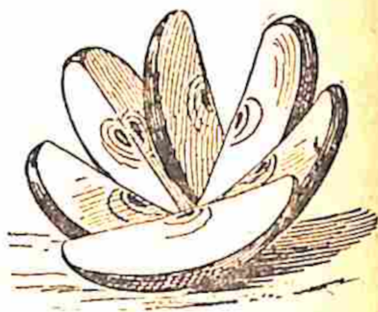
3. $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{16}{15}$, $\frac{17}{17}$, $\frac{19}{18}$.

4. $\frac{20}{18}$, $\frac{21}{19}$, $\frac{25}{20}$, $\frac{21}{21}$, $\frac{28}{25}$, $\frac{30}{30}$, $\frac{35}{30}$. $\frac{39}{38}$, $\frac{42}{40}$, $\frac{50}{40}$, $\frac{60}{50}$, $\frac{100}{99}$.

Dividendo menor que o divisor

71. Uma fração pode também ser considerada como o quociente da divisão, em que o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor. Em $\frac{3}{4}$, por exemplo, 3 é o dividendo, 4 é o divisor, e $\frac{3}{4}$ é o quociente; de sorte que $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

Problema. Dividindo-se igualmente 1 maçã por 6 meninos, que fração da maçã caberá a cada um?



Solução. O dividendo é a maçã ou 1, e o divisor é 6. Temos de dividir a maçã em 6 partes iguais chamadas sextos, e dar $\frac{1}{6}$ a cada um. Portanto $1 \div 6 = \frac{1}{6}$. Do mesmo modo, $2 \div 3 = \frac{2}{3}$; $3 \div 5 = \frac{3}{5}$; $7 \div 9 = \frac{7}{9}$; $9 \div 11 = \frac{9}{11}$, etc.

Regra. *Para se dividir um número menor por outro maior, escreve-se o dividendo como numerador, e o divisor como denominador; a fração resultante será o quociente.*

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes divisões:

	Resp.		Resp.
1. $1 \div 5 = ?$	**5.** $2 \div 5 = ?$	**9.** $6 \div 7 = ?$	**13.** $10 \div 13 = ?$
2. $1 \div 9 = ?$	**6.** $2 \div 7 = ?$	**10.** $7 \div 10 = ?$	**14.** $15 \div 19 = ?$
3. $1 \div 10 = ?$	**7.** $3 \div 8 = ?$	**11.** $8 \div 13 = ?$	**15.** $18 \div 23 = ?$
4. $1 \div 12 = ?$	**8.** $4 \div 5 = ?$	**12.** $9 \div 10 = ?$	**16.** $99 \div 100 = ?$

17. 7 que fração é de 9? $\frac{7}{9}$

18. 5 que fração é de 12? ?

19. 15 que fração é de 90? ?

20. 50 que fração é de 100? ?

Complemento do quociente

72. Quando uma divisão deixa resto, pode-se concluir a operação juntando-se ao número inteiro do quociente uma fração que tenha o resto como numerador, e o divisor como denominador. Se o resto fôr 2, por exemplo, e o divisor 5, juntam-se $\frac{2}{5}$ ao quociente.

Problema. Dividindo-se 5 maçãs por 2 meninos, que porção receberá cada um ?

Solução. Dividindo-se 5 por 2, o quociente é 2, e fica 1 de resto. O resto é 1 maçã, que ficou por dividir. Dividindo-se agora 1 maçã por 2, o quociente é um meio, de sorte que cada menino receberá 2 maçãs e um meio de uma maçã.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2\frac{1}{2} \end{array}$$



Regra. *Para se completar o quociente de uma divisão com resto, junta-se ao número inteiro do quociente uma fração que tenha o resto como numerador, e o divisor como denominador*

Exercício de aplicação. Completar o quociente nas seguintes divisões:

1.	$35 \div 6 =$	Resp. $5\frac{5}{6}$		**5.**	$37 \div 15 =$	Resp. ?
2.	$144 \div 7 =$	" $20\frac{4}{7}$		**6.**	$86 \div 17 =$	" ?
3.	$155 \div 8 =$	" $19\frac{3}{8}$		**7.**	$125 \div 18 =$	" ?
4.	$268 \div 9 =$	" $29\frac{7}{9}$		**8.**	$213 \div 19 =$	" ?

Simplificação das frações

73. Antes de entrarmos no ensino das quatro operações fundamentais sôbre frações, precisamos aprender com perfeição os quatro processos seguintes:

1.º Simplificar frações.

2.º Transformar frações impróprias em números inteiros ou mistos.

3.º Transformar números inteiros ou mistos em frações impróprias.

4.º Reduzir frações ao mínimo denominador comum.

Comecemos pela simplificação de frações.

74. Simplificar uma fração é exprimi-la em têrmos menores, mas com o mesmo valor. Assim, a fração $\frac{12}{24}$ pode ser simplificada ou reduzida a $\frac{6}{12}$, a $\frac{3}{6}$, ou a $\frac{1}{2}$.

Reduzir uma fração à expressão mais simples é exprimi-la nos menores números em que ela pode ser expressa. Assim, a expressão mais simples de $\frac{\text{[illegible]}}{24}$ é $\frac{1}{2}$.

Esta redução é baseada no seguinte princípio:

"*Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, muda-se-lhe a forma, mas não se lhe altera o valor*".

Ilustração. Como na redução das frações empregamos sòmente a divisão dos dois têrmos, é esta a parte do princípio que vamos ilustrar.

$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

Dividindo ambos os têrmos de $\frac{8}{12}$ por 4, teremos $\frac{2}{3}$. Ora $\frac{2}{3}$ embora tenham uma forma diferente de $\frac{8}{12}$, exprimem o mesmo valor, como vamos demonstrar. Dividindo o numerador de $\frac{8}{12}$ por 4, temos $\frac{2}{12}$; nesta divisão, $\frac{8}{12}$ ficam reduzidos à sua quarta parte, porque **2 dozeavos** são um quarto de **8 dozeavos**. Dividindo o denominador de $\frac{8}{12}$ por 4, temos $\frac{8}{3}$; nesta divisão, $\frac{8}{12}$ ficam 4 vêzes maior, porque $\frac{8}{3}$ são iguais a $\frac{32}{12}$ e **32** dozeavos contêm 4 vêzes **8 dozeavos**. A fração resultante conservará o valor da fração primitiva.

75. As frações são redutíveis ou irredutíveis.

Fração redutível é aquela que pode ser expressa em têrmos menores, mas com o mesmo valor, como $\frac{4}{8}$ que pode ser reduzida a $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Fração irredutível é a que não pode ser simplificada. Isto se dá sempre que os têrmos da fração são números primos entre si, como $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{12}$, etc.

76. Há dois modos de reduzir uma fração à sua expressão mais simples:

1.º *Dividir sucessivamente ambos os têrmos da fração pelos seus divisores comuns.*

2.º *Dividir ambos os têrmos pelo seu máximo divisor comum.*

Problema. Reduzir $\frac{105}{140}$ à sua expressão mais simples.

Solução. Sendo ambos os têrmos da fração divisíveis por 5, dividem-se por êste número, e a fração resultante será $\frac{21}{28}$. Sendo ambos os têrmos desta fração divisíveis por 7, dividem-se por êste número, e a nova fração será $\frac{3}{4}$. Como os têrmos de $\frac{3}{4}$ são primos entre si, esta fração é irredutível. Portanto a expressão mais simples de $\frac{105}{140}$ é $\frac{3}{4}$.

Divisão sucessiva

$$\frac{105}{140} = \frac{105 \div 5}{140 \div 5} = \frac{21}{28}$$

$$\frac{21}{28} = \frac{21 \div 7}{28 \div 7} = \frac{3}{4}$$

O segundo modo de simplificar é o seguinte: Procura-se o máximo divisor comum de 105 e 140, (n. 62). Êste divisor é 35; dividem-se, então, ambos os têrmos da fração por 35, e o resultado é $\frac{3}{4}$.

Máximo divisor

$$\frac{105}{140} = \frac{105 \div 35}{140 \div 35} = \frac{3}{4}$$

Regra. *Para se reduzir uma fração à sua expressão mais simples, dividem-se sucessivamente ambos os seus têrmos pelos seus divisores comuns até que os quocientes sejam primos entre si.*

Ou

Dividem-se ambos os têrmos pelo seu máximo divisor comum.

Exercício de aplicação. Reduzir as seguintes frações à expressão mais simples:

	Resp.		Resp.		Resp.		Resp.
1. $\frac{3}{6}$.	$\frac{1}{2}$	**8.** $\frac{16}{20}$.	$\frac{4}{5}$	**15.** $\frac{15}{45}$.	?	**22.** $\frac{70}{140}$.	?
2. $\frac{2}{6}$.	$\frac{1}{3}$	**9.** $\frac{24}{26}$.	$\frac{12}{13}$	**16.** $\frac{20}{60}$.	?	**23.** $\frac{50}{150}$.	?
3. $\frac{4}{6}$.	$\frac{2}{3}$	**10.** $\frac{42}{70}$.	$\frac{3}{5}$	**17.** $\frac{35}{60}$.	?	**24.** $\frac{30}{240}$.	?
4. $\frac{6}{8}$.	$\frac{3}{4}$	**11.** $\frac{8}{16}$.	$\frac{1}{2}$	**18.** $\frac{16}{48}$.	?	**25.** $\frac{50}{200}$.	?
5. $\frac{6}{14}$.	$\frac{3}{7}$	**12.** $\frac{5}{15}$.	$\frac{1}{3}$	**19.** $\frac{32}{160}$.	?	**26.** $\frac{90}{600}$.	?
6. $\frac{7}{14}$.	$\frac{1}{2}$	**13.** $\frac{5}{20}$.	$\frac{1}{4}$	**20.** $\frac{11}{121}$.	?	**27.** $\frac{30}{320}$.	?
7. $\frac{10}{12}$.	$\frac{5}{6}$	**14.** $\frac{6}{24}$.	$\frac{1}{4}$	**21.** $\frac{66}{88}$.	?	**28.** $\frac{90}{860}$.	?

Extrair os inteiros de uma fração imprópria

77. Extrair os inteiros de uma fração imprópria é achar o número inteiro ou misto que lhe é equivalente.

Problema. Extrair os inteiros de $\frac{12}{4}$

$$\frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3.$$

Solução. Desde que $\frac{4}{4} = 1$, segue-se que $\frac{12}{4}$ são iguais a $12 \div 4 = 3$ inteiros.

1.º Problema. Seis meias peras, quantas peras são?

Solução. 6 meias pêras são $\frac{6}{2}$. e como $\frac{2}{2}$ formam 1 pêra inteira, $\frac{6}{2}$ formam $6 \div 2 = 3$ pêras. Portanto 6 meias pêras são 3 inteiras.



2.º Problema. Sete meias peras, quantas peras são?

Solução. 7 meias pêras são $\frac{7}{2}$, e como $\frac{2}{2}$ formam 1 pêra inteira, $\frac{7}{2}$ formam $7 \div 2 = 3\frac{1}{2}$ pêras, isto é, 3 pêras inteiras e meia pêra. No 1.º problema, temos 3 pêras, que formam um número inteiro; no 2.º, temos $3\frac{1}{2}$ pêras, que formam um número misto.

$$6 \div 2 = 3$$

$$7 \div 2 = 3\frac{1}{2}$$

Regra. *Para extrair os inteiros de uma fração imprópria, divide-se o numerador pelo denominador; o quociente é a parte inteira e o resto é o numerador da parte fracionária, cujo denominador é o mesmo da fração dada.*

Exercício de aplicação. Transformar as seguintes frações impróprias em números inteiros ou mistos, segundo o caso:

	Resp.		Resp.		Resp.		Resp.
1. $\frac{6}{3}$.	2	5. $\frac{53}{9}$.	?	9. $\frac{72}{15}$.	?	13. $\frac{200}{20}$.	?
2. $\frac{16}{4}$.	4	6. $\frac{44}{11}$.	?	10. $\frac{98}{14}$.	?	14. $\frac{360}{30}$.	?
3. $\frac{19}{4}$.	$4\frac{3}{4}$	7. $\frac{54}{11}$.	?	11. $\frac{123}{16}$.	?	15. $\frac{480}{80}$.	?
4. $\frac{35}{7}$.	5	8. $\frac{60}{12}$.	?	12. $\frac{149}{21}$.	?	16. $\frac{550}{110}$.	?

Transformar números inteiros ou mistos em frações

78. Transformar um número inteiro ou misto em uma fração é achar a fração imprópria equivalente ao inteiro ou misto.

Problema. Transformar 5 inteiros em têrços.

Solução. Desde que 1 inteiro tem 3 têrços, 5 inteiros tem 5 × 3 = 15 têrços.

Processo

$$5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$$

Problema. Transformar $6\frac{3}{4}$ em uma fração.

Solução. Como 1 inteiro tem 4 quartos, 6 inteiros têm 6 × 4 = 24 quartos; adicionando mais 3 da fração, fazem 27 quartos.

Processo

$$6\,\frac{3}{4} = \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{27}{4}$$

Regra. *Para se transformar um número inteiro em uma fração imprópria, escreve-se o denominador dado como o denominador da fração, e como numerador escreve-se o produto do inteiro multiplicado pelo denominador.*

Se o número fôr misto, multiplica-se o inteiro pelo denominador, e o produto adicionado com o numerador será o numerador da fração imprópria.

Exercício de aplicação. Transformar os seguintes números mistos em frações impróprias:

	Resp.		Resp.		Resp.
1. $2\frac{1}{2}$.	$\frac{5}{2}$	**5.** $7\frac{2}{3}$.	$\frac{23}{3}$	**9.** $3\frac{3}{25}$.	?
2. $6\frac{1}{3}$.	$\frac{19}{3}$	**6.** $8\frac{1}{5}$.	$\frac{41}{5}$	**10.** $19\frac{2}{10}$.	?
3. $8\frac{2}{5}$.	$\frac{42}{5}$	**7.** $6\frac{5}{12}$.	$\frac{77}{12}$	**11.** $18\frac{1}{6}$.	?
4. $9\frac{2}{7}$.	$\frac{65}{7}$	**8.** $7\frac{2}{7}$.	$\frac{51}{7}$	**12.** $30\frac{2}{15}$.	?

Reduzir frações ao mínimo denominador comum

79. Reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador, é dar a tôdas um denominador igual sem lhes alterar o valor. Esta redução é baseada no seguinte princípio de Aritmética:

Multiplicando-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, não se altera o valor da fração.

Ilustração. Se multiplicarmos ambos os têrmos de $\frac{1}{2}$ por 3, esta fração ficará $\frac{3}{6}$. Ora, como o numerador da nova fração é a metade do denominador, a fração continua igual a $\frac{1}{2}$ e, dêste modo, não há alteração no seu valor.

Nota. O método de reduzir frações a um denominador comum que vamos apresentar, além de ser muito fácil e simples, tem a vantagem de obter o mínimo denominador comum, o que simplifica as operações e abrevia consideràvelmente os processos do cálculo.

Problema. Reduzir $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{12}$ ao mínimo denominador comum.

Solução. Acharemos primeiro o mínimo múltiplo comum dos quatro denominadores 3, 6, 8 e 12 (Vêde n.º **64**). O mínimo múltiplo comum dêstes quatro números é 24, que será também o menor denominador comum destas frações. Escreveremos depois o número 24 debaixo de cada fração, pondo um traço sôbre êle, para escrevermos em cima o respectivo numerador, como vemos aqui, $\overline{24}$, $\overline{24}$, $\overline{24}$, $\overline{24}$. O número 24 será agora dividido pelo denominador de cada fração, e o quociente multiplicado pelo seu respectivo numerador.

Processo

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{12}$$

$$\frac{16}{24},\ \frac{4}{24},\ \frac{9}{24},\ \frac{10}{24}$$

Comecemos a redução pela fração $\frac{2}{3}$. Dividindo 24 pelo denominador 3, o quociente é 8, isto é, 24 é 8 vêzes maior do que 3, e para o numerador 2 ficar também 8 vêzes maior, a fim de não alterarmos o valor desta fração, multiplicaremos o numerador 2 por 8, e teremos $2 \times 8 = 16$, que escreveremos sôbre o denominador 24, e o resultado será $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

Passemos agora a $\frac{1}{6}$. Dividindo 24 por 6, o quociente é 4, isto é, 4 vêzes maior do que 6, e para o numerador 1 ficar também 4 vêzes maior, multiplica-lo-emos por 4, e teremos $1 \times 4 = 4$, que escreveremos sôbre o denominador 24, e o resultado será $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Do mesmo modo faremos com $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{12}$, e assim ficarão as quatro frações reduzidas ao mínimo denominador comum.

2.º Problema. Reduzir $\frac{5}{20}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{2}{5}$ ao mínimo denominador comum.

Solução. As duas primeiras frações podem ser simplificadas, porque $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, e $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

As três frações simplificadas ficam então $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{5}$. Como os denominadores destas frações são dois a dois primos entre si, o seu denominador comum é $4\times3\times5=60$. Prossegue-se depois como no problema precedente.

Frações	$\frac{5}{20}$,	$\frac{8}{12}$,	$\frac{2}{5}$
Simplificadas	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{2}{5}$
Com denominador comum	$\frac{15}{60}$,	$\frac{40}{60}$,	$\frac{24}{60}$

Regra. *Para se reduzirem duas ou mais frações ao mínimo denominador comum, simplificam-se as frações redutíveis; acha-se depois o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações, e êsse será o mínimo denominador comum.*

Divide-se êste denominador comum pelo denominador de cada fração; o quociente multiplica-se pelo numerador respectivo, e o produto escreve-se sôbre o denominador comum.

Exercício de aplicação. Reduzir os seguintes grupos de frações ao seu mínimo denominador comum.

		Respostas.
1.	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.	$\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}$
2.	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$.	$\frac{20}{40}$, $\frac{15}{40}$, $\frac{32}{40}$
3.	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$.	$\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{60}{70}$
4.	$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$.	$\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{6}$
5.	$\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{17}$.	$\frac{4}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$

		Respostas.
6.	$\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$.	$\frac{12}{16}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{11}{16}$
7.	$\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{9}{14}$.	?
8.	$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$.	?
9.	$\frac{5}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{15}$	?
10	$\frac{25}{50}$, $\frac{25}{60}$, $\frac{18}{30}$, $\frac{12}{20}$	?

Somar frações

80. Na adição de frações há três casos a considerar:

1.º Somar frações que têm o mesmo denominador,

2.º Somar frações que têm denominadores diferentes.

3.º Somar frações e números inteiros ou mistos.

1.º Caso. Problema. Qual é a soma de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$?

Solução. 1 quarto, mais 2 quartos, mais 3 quartos são 6 quartos; e $\frac{6}{4}$, extraídos os inteiros, dão $1\frac{2}{4}$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$$

Regra. *Para se somarem frações que têm o mesmo denominador, adicionam-se os numeradores, e a soma escreve-se sôbre o denominador comum.*

2.º Caso. Problema. Qual é a soma de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$?

Solução. As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ reduzidas ao mínimo denominador comum, ficam $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{3}{12}$; e a soma destas frações é $\frac{17}{12}$ ou $1\frac{5}{12}$.

$$\frac{6}{12}+\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{17}{12}$$

Regra. *Para se somarem frações com denominadores diferentes, reduzem-se as frações a um denominador comum, e depois adicionam-se os numeradores.*

3.º Caso. Problema. Qual é a soma de 8, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 7?

Solução. A soma dos inteiros é $8 + 7 = 15$. A soma das frações é $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$. Adicionando as duas parcelas, temos $16\frac{1}{4}$.

Inteiros	$8 + 7 = 15$
Frações	$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$
Soma	$=16\frac{1}{4}$

Regra. *Para se somarem números inteiros ou mistos e frações, adicionam-se os inteiros, depois as frações, e somam-se as duas parcelas.*

Exercício de aplicação. Somar as seguintes frações:

		Respostas.			Respostas.
1.	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=$	$1\frac{1}{5}$	8.	$5\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=$	?
2.	$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=$	$\frac{5}{6}$	9.	$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{12}{5}=$	?
3.	$\frac{7}{20}+\frac{6}{20}+\frac{4}{20}=$	$\frac{17}{20}$	10.	$\frac{3}{9}+\frac{5}{4}+\frac{6}{18}=$	?
4.	$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=$	$\frac{13}{24}$	11.	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{5}{8}=$	?
5.	$\frac{3}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}=$	$1\frac{5}{8}$	12.	$8\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+3=$	?
6.	$\frac{5}{10}+\frac{4}{8}+\frac{7}{14}=$	$1\frac{1}{2}$	13.	$\frac{20}{240}+\frac{33}{132}+\frac{77}{308}=$	?
7.	$3\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}+1=$	$9\frac{3}{4}$	14.	$8\frac{1}{2}+7\frac{1}{4}+6\frac{1}{2}=$	?

Subtrair frações

81. Na subtração de frações há três casos a considerar:

1.º Subtrair uma fração de outra, tendo ambas o mesmo denominador.

2.º Subtrair uma fração de outra, tendo denominadores diferentes.

3.º Subtrair uma fração de um número inteiro ou misto.

1.º Caso. Problema. De $\frac{3}{4}$ subtraindo $\frac{2}{4}$ quanto resta?

Solução. De 3 quartos subtraindo 2 quartos, resta 1 quarto.

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$$

Regra. *Para se subtrair uma fração de outra, quando têm o mesmo denominador, acha-se a diferença entre os numeradores e escreve-se sôbre o denominador comum.*

2.º Caso. Problema. De $\frac{1}{2}$ subtraindo $\frac{1}{4}$, quanto resta ?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = ?$$

Solução. Reduzindo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ ao mínimo denominador comum, temos $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$;ora, de 2 quartos subtraindo 1 quarto, resta 1 quarto.

$$\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Regra. *Para se subtrair uma fração de outra, quando têm denominadores diferentes, reduzem-se ambas ao mesmo denominador e efetua-se depois a subtração.*

3.º Caso. Problema. De $8\frac{1}{3}$ subtraindo $3\frac{1}{2}$, quanto resta?

Solução. Reduzindo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ ao mesmo denominador, temos $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Como não podemos subtrair $\frac{3}{6}$ de $\frac{2}{6}$, tiramos 1 unidade de 8, e como 1 tem $\frac{6}{6}$, com os $\frac{2}{6}$ fazem $\frac{8}{6}$. Agora, de $\frac{8}{6}$ tirando $\frac{3}{6}$, restam $\frac{5}{6}$; e de 7 tirando 3 restam 4. A resposta é $4\frac{5}{6}$.

$$8\tfrac{1}{3} - 3\tfrac{1}{2} = ?$$
$$8\tfrac{2}{6} - 3\tfrac{3}{6} = ?$$
$$7\tfrac{8}{6} - 3\tfrac{3}{6} = 4\tfrac{5}{6}$$

Regra. *Para se subtrair uma fração ou um número misto de outro, reduzem-se as frações ao mesmo denominador, e se a fração do minuendo fôr inferior à do subtraendo, tira-se uma unidade do inteiro e junta-se com a fração do minuendo e opera-se a subtração.*

Nota. Podemos também reduzir o número misto a uma fração imprópria, e depois operar a subtração; assim, $2\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$. Êste processo só é preferível quando o número misto não é muito alto.

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes subtrações:

		Resp.			Resp.			Resp.
1.	$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} =$	$\frac{3}{9}$	**5.**	$8\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} =$	?	**9.**	$8\frac{1}{2} - 7 =$	?
2.	$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$	$\frac{5}{12}$	**6.**	$\frac{8}{9} - \frac{2}{9} =$	?	**10.**	$9\frac{3}{4} - 5\frac{1}{4} =$	?
3.	$\frac{3}{5} - \frac{1}{4} =$	$\frac{7}{20}$	**7.**	$\frac{1}{12} - \frac{1}{14} =$	?	**11.**	$5\frac{2}{5} - 1\frac{2}{5} =$	?
4.	$7\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$	$6\frac{3}{4}$	**8.**	$\frac{7}{14} - \frac{3}{7} =$	?	**12.**	$10\frac{1}{8} - 3\frac{2}{8} =$	?

Multiplicar frações

82. Na multiplicação de frações há quatro casos a considerar:

1.º Multiplicar uma fração por um número inteiro.
2.º Multiplicar um inteiro por uma fração.
3.º Multiplicar uma fração por outra fração.
4.º Multiplicar uma fração por um número misto.

1.º Caso. Êste caso pode ser resolvido de dois modos, ou multiplicando o numerador, ou dividindo o denominador.

Problema. Multiplicar $\frac{3}{4}$ por 4.

Solução. 1.º Modo. Multiplicar uma fração por um número inteiro é tomar a fração tantas vêzes, quantas são as unidades do inteiro. Assim, $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$; pois 4 vêzes 3 quartos são 12 quartos, que são 3 inteiros.

2.º Modo. Se dividirmos o denominador de $\frac{3}{4}$ por 4, teremos $4 \div 4 = 1$, e o resultado do processo será $\frac{3}{1} = 3$. Esta solução só é praticável, quando o denominador se divide exatamente pelo inteiro.

Operação

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4 \div 4} = \frac{3}{1} = 3$$

Regra. *Para se multiplicar uma fração por um número inteiro, multiplica-se o numerador da fração pelo inteiro, e escreve-se o produto sôbre o denominador.*

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes multiplicações:

1. $\frac{5}{6} \times 3 =$ Resp. $2\frac{1}{2}$	5. $\frac{6}{8} \times 5 =$ Resp. ?	9. $\frac{22}{36} \times 15 =$ Resp. ?
2. $\frac{2}{5} \times 9 =$ " $3\frac{3}{5}$	6. $\frac{11}{12} \times 6 =$ " ?	10. $\frac{28}{88} \times 21 =$ " ?
3. $\frac{3}{9} \times 7 =$ " $2\frac{1}{3}$	7. $\frac{13}{15} \times 12 =$ " ?	11. $\frac{50}{90} \times 30 =$ " ?
4. $\frac{7}{10} \times 8 =$ " $5\frac{3}{5}$	8. $\frac{15}{30} \times 14 =$ " ?	12. $\frac{66}{99} \times 36 =$

2.º Caso. Problema. Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$.

Solução. Multiplicando o inteiro pelo numerador da fração, temos $6 \times 1 = 6$, que são 6 têrços ou 2 inteiros.

$$6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Exposição. Multiplicando 6 por 1, temos $6 \times 1 = 6$, mas como o multiplicador é $\frac{1}{3}$, isto é, a têrça parte de 1, o produto deve ser também a têrça parte de 6, que é $\frac{6}{3} = 2$. Ainda que a multiplicação de uma fração por um número inteiro se opere do mesmo modo que a multiplicação de um inteiro por uma fração, e dê o mesmo resultado, há, contudo, grande diferença na análise das duas operações.

Multiplicar $\frac{1}{3}$ por 6 é repetir um têrço 6 vêzes, que são 6 têrços ou 2 inteiros, e neste caso, o produto é maior do que o multiplicador. Mas multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ é reduzir 6 à sua têrça parte, que é $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$, e neste caso, o produto é menor do que o multiplicando. Para compreendermos êste resultado, notaremos que multiplicar é repetir ou tomar um número tantas vêzes quantas são as unidades do multiplicador. Assim, que são 12.

Multiplicar 6 por 2 é tomar 6 duas vêzes, que é 6.
Multiplicar 6 por 1 é tomar 6 uma vez, que é 6.
Multiplicar 6 por $\frac{1}{2}$ é tomar a metade de 6, que é 3.
Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ é tomar a têrça parte de 6, que é 2.

Portanto, quando o multiplicador fôr menor do que a unidade, o produto será sempre inferior ao multiplicando.

3.º Caso. Problema. Multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$

Solução. Multiplicando os numeradores, temos $2 \times 4 = 8$; multiplicando depois os denominadores, temos $3 \times 5 = 15$. O produto é $\frac{8}{15}$.

Demonstração. Multiplicando o numerador de $\frac{2}{3}$ por 4 temos $\frac{8}{3}$, isto é, temos 4 vêzes 2 têrços que são 8 têrços. Mas o multiplicador é a quinta parte de 4 que são $\frac{4}{5}$, e o produto deve ser também a quinta parte de $\frac{8}{3}$. Multiplicando agora o denominador de $\frac{8}{3}$ por 5, reduzimos esta fração à sua quinta parte, e então temos $\frac{8}{15}$, que é o produto procurado.

Operação

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Regra. *Para se achar o produto de duas ou mais frações, multiplicam-se entre si os numeradores, e o mesmo se faz com os denominadores, e os dois produtos serão os têrmos respectivos da fração requerida.*

4.º Caso. Quando um ou ambos os fatôres de uma multiplicação são números mistos, reduzem-se a frações impróprias, e procede-se como na regra precedente; assim, $\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{11}{5} = \frac{22}{15}$

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes multiplicações:

	Respostas.		Respostas.		Respostas.
1. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} =$	$\frac{3}{20}$	5. $2\frac{2}{5} \times 3\frac{1}{2} =$	$8\frac{2}{5}$	9. $\frac{9}{15} \times \frac{7}{30} =$	?
2. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$	$\frac{15}{28}$	6. $\frac{5}{6} \times 7\frac{1}{2} =$	?	10. $5\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} =$	?
3. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$	$\frac{8}{15}$	7. $14 \times \frac{5}{7} =$	?	11. $25 \times 8\frac{3}{5} =$	?
4. $\frac{7}{8} \times \frac{8}{7} =$	1	8. $\frac{7}{8} \times \frac{8}{10} =$	?	12. $10\frac{1}{5} \times \frac{1}{8} =$	?

13. Um menino estudando $5\frac{1}{2}$ horas por dia, quantas horas estudará em 6 dias? Resp. 33.

14. Um homem andando $\frac{3}{4}$ de uma légua por hora, quantas léguas andará em 9 horas? Resp. $6\frac{3}{4}$

15. Dei $2\frac{1}{2}$ maçãs a cada uma das 6 meninas de minha classe, quantas maçãs dei ao todo? Resp. 15.

16. Quanto é sete vêzes $6\frac{2}{7}$? Resp. 44.

17. Quanto é dez vêzes $5\frac{2}{5}$? Resp. 54.

Multiplicação cancelada

83. A multiplicação de frações pode ser muito abreviada cancelando-se os numeradores e denominadores iguais, e dividindo-se os numeradores e denominadores que tiverem um divisor comum. (Vêde n. **58**).

Problema. Qual é o produto de $\frac{3}{7} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$?

Solução. Como o numerador da primeira fração é igual ao denominador da terceira, cancelam-se os dois têrmos, e desaparecem da multiplicação. Como o numerador da segunda fração é igual ao denominador da primeira, cancelam-se os dois têrmos, e desaparecem. Restam agora o numerador 2 e o denominador 5, que fazem dois quintos, produto da multiplicação.

Operação

$$\frac{\not{3}}{\not{7}} \times \frac{\not{7}}{5} \times \frac{2}{\not{3}} = \frac{2}{5}$$

Demonstração. Se multiplicarmos $\frac{3}{7} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$ desprezando o cancelamento, teremos o produto $\frac{42}{105}$ que simplificado ficará também $\frac{2}{5}$. A fração $\frac{42}{105}$ tem o numerador composto de $2 \times 3 \times 7$, e o denominador composto de $3 \times 5 \times 7$. Ora, como os fatores 3 e 7 são comuns a ambos os têrmos, podemos cancelá-los sem alterar o valor da fração, porque é o mesmo que dividir os dois têrmos por 3 e por 7, como já demonstrámos no n.º 74.

Problema. Multiplicar $\frac{7}{18} \times \frac{6}{14} \times \frac{1}{5}$

Solução. Podemos dividir por 7 o numerador da primeira fração e o denominador da segunda. Operando, temos $7 \div 7 = 1$, e $14 \div 7 = 2$. Cancelaremos os dois números, e escreveremos os quocientes 1 e 2 nos seus lugares respectivos. Podemos também dividir por 6 o numerador da segunda fração e o denominador da primeira; operando, temos $6 \div 6 = 1$, e $18 \div 6 = 3$. Cancelaremos 6 e 18, e poremos nos seus respectivos lugares os quocientes 1 e 3. Agora o numerador é $1 \times 1 \times 1$, e o denominador é $3 \times 2 \times 5 = 30$. A resposta é um trinta avos.

$$\frac{\overset{1}{\not{7}}}{\underset{3}{\not{18}}} \times \frac{\overset{1}{\not{6}}}{\underset{2}{\not{14}}} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes multiplicações por meio de cancelamento:

		Resp.			Resp.
1.	$\frac{7}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{3}{7}$.	$\frac{1}{6}$	7.	$\frac{3}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{5}$.	?
2.	$\frac{25}{43} \times \frac{18}{25} \times \frac{43}{65} \times \frac{4}{18}$.	$\frac{4}{65}$	8.	$\frac{18}{20} \times \frac{5}{9} \times \frac{11}{13} \times \frac{13}{22}$.	?
3.	$\frac{18}{26} \times \frac{13}{36} \times \frac{3}{4}$.	$\frac{3}{16}$	9.	$\frac{15}{40} \times \frac{17}{45} \times \frac{15}{34} \times \frac{3}{4}$.	?
4.	$\frac{7}{22} \times \frac{11}{21} \times \frac{22}{14}$.	$\frac{11}{42}$	10.	$\frac{21}{34} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{3} \times \frac{9}{10}$.	?
5.	$\frac{25}{39} \times \frac{8}{15} \times \frac{39}{50}$.	$\frac{4}{15}$	11.	$\frac{13}{20} \times \frac{5}{26} \times \frac{8}{9} \times \frac{12}{16}$.	?
6.	$\frac{14}{30} \times \frac{15}{28} \times \frac{11}{17} \times \frac{17}{22}$.	$\frac{1}{8}$	12.	$\frac{25}{100} \times \frac{3}{32} \times \frac{3}{12} \times \frac{16}{25}$.	?

Fração de uma quantidade

84. Obtém-se uma fração de uma quantidade multiplicando-se esta pela fração.

Problema. Calcular quantas peras são [illegible] de uma caixa com 60 peras.

Solução. $\frac{1}{5}$ de 60 se obtém dividindo 60 por 5, ou, seja, $60 \div 5 = 12$. Se $\frac{1}{5}$ corresponde a 12 pêras, $\frac{3}{5}$ serão três vêzes mais ou $12 \times 3 = 36$ pêras. Ora, o mesmo resultado se obteria multiplicando 60 por $\frac{3}{5}$. Com efeito:

$$60 \times \frac{3}{5} = \frac{60 \times 3}{5} = 36$$

Então, para obter-se uma fração de qualquer quantidade, basta multiplicar esta quantidade pela fração.

Exercício de aplicação:

	Resp
1. Calcule $\frac{2}{7}$ de 35	10
2. Achar os $\frac{3}{8}$ de 56	21
3. Obter $\frac{5}{9}$ de 360	200
4. Calcule $\frac{11}{8}$ de 240 metros	330m

Dividir frações

85. Na divisão de frações há quatro casos a considerar:

1.º Dividir uma fração por número inteiro.
2.º Dividir um número inteiro por uma fração.
3.º Dividir uma fração por outra fração.
4.º Dividir uma fração por um número misto.

1.º Caso. Problema. Dividir $\frac{6}{8}$ por 3.

Solução. Esta operação tem por fim dividir 6 oitavos em 3 partes iguais. Dividindo 6 oitavos por 3 o quociente é $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$. Não se podendo dividir exatamente o numerador de uma fração pelo divisor, multiplica-se o denominador pelo divisor, e obtém-se o mesmo resultado, que é $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Processo

$$\frac{6 \div 3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{8 \times 3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Regra. *Para se dividir uma fração por um número inteiro, observa-se o seguinte: se o numerador da fração fôr divisível pelo inteiro, opera-se a divisão, e se não fôr, multiplica-se o denominador pelo inteiro e escreve-se o produto debaixo do numerador.*

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes divisões:

		Respostas			Respostas			Respostas
1.	$\frac{4}{5} \div 4 =$	$\frac{1}{5}$	6.	$\frac{6}{11} \div 3 =$	?	11.	$\frac{7}{8} \div 9 =$	?
2.	$\frac{2}{3} \div 3 =$	$\frac{2}{9}$	7.	$\frac{8}{9} \div 6 =$	?	12.	$\frac{11}{12} \div 5 =$	?
3.	$\frac{7}{8} \div 5 =$	$\frac{7}{40}$	8.	$\frac{16}{21} \div 8 =$	?	13.	$\frac{13}{16} \div 4 =$	?
4.	$\frac{9}{10} \div 3 =$	?	9.	$\frac{14}{23} \div 7 =$	?	14.	$\frac{5}{10} \div 5 =$	?
5.	$\frac{8}{15} \div 4 =$	?	10.	$\frac{45}{47} \div 15 =$	?	15.	$\frac{14}{17} \div 3 =$	?

2.º Caso. Problema. Qual é o quociente de 6 dividido por $\frac{2}{3}$?

Solução. Dividir 6 por $\frac{2}{3}$ é dividir 6 pela têrça parte de 2. Isto se obtém multiplicando 6 por 3 e dividindo o produto por 2; o resultado 9 é o quociente da divisão.

Processo

$$6 \div \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

Exposição. Se dividirmos um número inteiro por outro inteiro, o quociente será sempre menor do que o dividendo; mas, se o dividirmos por uma fração, o quociente será sempre maior do que o dividendo, como vemos no problema dêste caso. Para compreendermos êste resultado, notaremos que o quociente mostra quantas vêzes o dividendo contém o divisor. Se dividirmos 6 por 2, o quociente será 3, porque 6 contém 3 vêzes 2; se dividirmos 6 por 1, o quociente será 6, porque 6 contém 6 vêzes 1; se dividirmos 6 por $\frac{1}{2}$ o quociente será 12, porque 6 contém 12 meios, etc.

Quando o divisor fôr menor do que a unidade, o quociente será maior do que o dividendo.

Regra. *Para se dividir um número inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo denominador, e divide-se o produto pelo numerador.*

3.º Caso. Problema. Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$

Solução. Invertendo os têrmos do divisor, temos $\frac{5}{2}$, multiplicando depois as duas frações, achamos $1\frac{7}{8}$, que é o quociente.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = ?$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Exposição. Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ quer dizer dividir $\frac{3}{4}$ pela quinta parte de 2, o que se obtém dividindo-se $\frac{3}{4}$ por 2, e multiplicando-se o resultado 5. Ora, multiplicando-se o denominador de $\frac{3}{4}$ por 2, divide-se a fração por 2; e multiplicando-se o numerador por 5, multiplica-se a fração por 5, e o resultado é $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$. Ora o multiplicador $\frac{5}{2}$ é justamente o divisor $\frac{2}{5}$ invertido.

Regra. *Para se dividir uma fração por outra, invertem-se os têrmos do divisor, e multiplicam-se as duas frações, e o resultado obtido será o quociente da divisão.*

4.º Caso. Quando um ou ambos os têrmos da divisão são números mistos, reduzem-se a frações impróprias, e segue-se a regra precedente; assim $8\frac{1}{4} \div 5\frac{1}{2} = \frac{33}{4} \div \frac{11}{2} = \frac{33}{4} \times \frac{2}{11} = \frac{66}{44} = 1\frac{1}{2}$

Exercício de aplicação. Efetuar as seguintes divisões:

		Resp.			Resp.
1.	$\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{4}$.	3	**9.**	$\frac{4}{6}$ por $\frac{2}{3}$.	?
2.	$\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$.	2	**10.**	$\frac{7}{9}$ por $\frac{1}{5}$.	?
3.	$\frac{5}{6}$ por $\frac{2}{3}$.	$1\frac{1}{4}$	**11.**	$\frac{2}{10}$ por $\frac{3}{7}$.	?
4.	$\frac{3}{12}$ por $\frac{7}{9}$.	$\frac{9}{28}$	**12.**	$2\frac{1}{4}$ por $7\frac{1}{2}$.	?
5.	$2\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{16}$.	40	**13.**	$\frac{2}{3}$ por $5\frac{1}{8}$.	?
6.	$4\frac{1}{2}$ por $1\frac{1}{3}$.	$3\frac{3}{8}$	**14.**	$\frac{7}{9}$ por 8 .	?
7.	$4\frac{3}{4}$ por $5\frac{1}{8}$.	$\frac{38}{41}$	**15.**	$4\frac{3}{5}$ por $2\frac{2}{7}$.	?
8.	$\frac{5}{8}$ por $2\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$	**16.**	$8\frac{2}{5}$ por $\frac{1}{3}$.	?

Fração de fração

86. Dá-se o nome de fração de fração a uma ou mais partes de uma fração, como $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$, que se lê: um meio de dois terços.

Assim, como a unidade pode ser dividida em partes iguais chamadas frações, estas partes podem também ser subdivididas em outras partes menores, chamadas frações de frações.

Ilustração. Se dividirmos uma maçã em duas partes iguais, cada parte será a metade ou $\frac{1}{2}$ da maçã. Se dividirmos depois uma destas metades em duas partes iguais, cada parte será $\frac{1}{2}$ da metade ou $\frac{1}{4}$ da maçã inteira; logo $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$ de um inteiro.



Do mesmo modo $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{4}$ é $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{5}$ é $\frac{2}{25}$, etc

Problema. Achar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

Solução. Multiplicando entre si as duas frações, temos como resultado $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Operação

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Demonstração. Um têrço de $\frac{3}{4}$ é $\frac{1}{4}$, porque um têrço de 3 é 1; então 2 têrços de $\frac{3}{4}$ são duas vêzes $\frac{1}{4}$ que são $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Regra. *Para se achar uma fração de outra, multiplicam-se as duas frações.*

Nota. Para se achar uma fração de um número misto, reduz-se o número misto a uma fração imprópria, e procede-se conforme a regra. Para se achar uma fração de um número inteiro, dá-se-lhe o denominador 1, e segue-se a regra; assim, $\frac{3}{4}$ de 8 são $\frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$.

Exercício de aplicação.

	Respostas
1. Achar $\frac{1}{8}$ de $\frac{5}{7}$.	$\frac{5}{56}$
2. Achar $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$.	$\frac{2}{15}$
3. Achar $\frac{3}{5}$ de 3.	$1\frac{4}{5}$
4. Achar $\frac{3}{7}$ de 12.	$5\frac{1}{7}$
5. Achar $\frac{2}{5}$ de $7\frac{1}{2}$.	3
6. Achar $\frac{2}{7}$ de $8\frac{3}{5}$.	$2\frac{16}{35}$

	Respostas
7. Achar $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{7}$.	?
8. Achar $\frac{4}{5}$ de $\frac{10}{12}$.	?
9. Achar $\frac{3}{4}$ de 8.	?
10. Achar $\frac{1}{2}$ de $9\frac{3}{4}$.	?
11. Achar $\frac{1}{7}$ de 20.	?
12. Achar $\frac{7}{8}$ de $\frac{1}{3}$.	?

Resolver os seguintes problemas:

1. Dividir a soma de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{20}$ pela diferença entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ Resp. $14\frac{2}{3}$.

2. Multiplicar 4 nonos por 6 décimos, e dividir o produto por 3 quartos menos 1 sexto. Resp. $\frac{16}{35}$.

3. Dividir $\frac{2}{5}$ por $\frac{3}{4}$, e depois dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$. e somar os dois quocientes. Resp. $2\frac{49}{120}$.

4. Dividir $\frac{5}{18}$ de $\frac{2}{5}$ por $\frac{2}{3}$. Resp. $\frac{1}{3}$

5. Qual a diferença entre $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{8}$? Resp. $\frac{1}{36}$

6. Reduzir a fração composta $\dfrac{4\frac{1}{2}}{8\frac{2}{3}}$ a uma fração simples.

Solução. O númerador é o dividendo, e o denominador é o divisor; então temos de dividir $4\frac{1}{2}$ por $8\frac{2}{3}$, que dá $\frac{9}{2} \div \frac{26}{3} = \frac{27}{52}$. (Vêde n.º 85).

7. Reduzir a fração composta $\dfrac{5}{7\frac{3}{6}}$ a uma fração simples. Resp. $\frac{2}{3}$.

8. Dividir $21\frac{4}{5}$ por $18\frac{4}{7}$. Resp. $1\frac{113}{650}$.

9. Multiplicar $\frac{3}{13} \times \frac{2}{16} \times \frac{5}{12} \times \frac{12}{35} \times \frac{7}{9}$. Resp. $\frac{1}{312}$.

10. Multiplicar $13\frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \times 8\frac{2}{5}$. Resp. $56\frac{2}{5}$.

11. Reduzir $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{10}$ ao mínimo denominador comum. Resp. ?

12. Qual é o resultado da expressão $\dfrac{5 \times 8 \times 9}{9 \times 10}$ Resp. ?

13. Exprimir $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ em oitavos. Resp. ?

14. Quanto é $\frac{4}{5}$ de 90 ? Resp. ?

15. Quanto é $\frac{3}{7}$ de $8\frac{3}{4}$? Resp. ?

16. Reduzir $\frac{11}{1001}$ e $\frac{13}{1001}$ à sua expressão mais símples. Resp. ?

17. Efetuar a soma dos números $8\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ e $9\frac{1}{8}$. Resp. ?

18. De $15\frac{24}{36}$ subtrair $11\frac{35}{45}$. Resp. ?

19. Quantos inteiros contêm as frações $\frac{60}{12}$, $\frac{70}{14}$ e $\frac{80}{16}$? Resp. ?

20. Qual é o produto de $7\frac{7}{10} \times 8\frac{4}{15}$? Resp. ?

21. Qual das frações $\frac{15}{27}$ e $\frac{8}{9}$ é a maior ? Resp. ?

22. Achar a diferença entre $\frac{13}{27}$ e $\frac{5}{11}$. . Resp. ?

23. Quanto somam $\frac{2}{3}$ de 18, $\frac{3}{4}$ de 32 e $\frac{4}{5}$ de 40? Resp. ?

24. Qual a diferença entre $\frac{5}{8}$ de 80, e de $\frac{8}{6}$ de 60? Resp. ?

25. Vinte e seis oitavos quantos quartos são? Resp. ?

26. Dezoito têrços quantos sextos são? Resp. ?

27. Dividir $\frac{8}{5}+\frac{5}{6}$ por $\frac{4}{5}-\frac{2}{8}$. Resp. ?

28. Se a $\frac{5}{7}$ fôr adicionada certa fração a soma será $\frac{9}{10}$. Qual é essa fração? Resp. ?

29. Reduzir a inteiros as frações $\frac{192}{12}$, $\frac{225}{15}$ e $\frac{1330}{35}$ Resp. ?

FRAÇÕES DECIMAIS

87. Fração decimal é uma ou mais partes da unidade dividida em 10, 100, 1000, 10000 etc. partes iguais. Por outras palavras: fração decimal é aquela que tem para denominador 10, 100, 1000, 10000 etc., isto é, tem para denominador uma das unidades do sistema de numeração decimal.

Exemplos de frações decimais:

$$\frac{7}{10}, \frac{85}{100}, \frac{2347}{1000}, \frac{432}{10000}$$

88. Quando o numerador da fração decimal é 1, tem-se uma *unidade fracionária decimal*. Essas unidades decimais recebem os nomes de *décimos, centésimos, milésimos, décimos milésimos, centésimos milésimos, milionésimos*, etc. Assim,

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000}$$

são as sucessivas ordens decimais

89. Se compararmos essas unidades decimais com as unidades inteiras que figuram nos denominadores, notamos a seguinte correspondência

10 (dezena)	100 (centena)	1000 (mil)	10000 (dez mil)
$\frac{1}{10}$ (décimo)	$\frac{1}{100}$ (centésimo)	$\frac{1}{1000}$ (milésimo)	$\frac{1}{10000}$ (décimo milésimo)

100000 (cem mil)	1000000 (milhão)
$\frac{1}{100000}$ (centésimo milésimo)	$\frac{1}{1000000}$ (milionésimo)

Por outro lado, é fácil ver que cada unidade vale 10 vêzes a ordem decimal seguinte. Com efeito se dividirmos certo comprimento em 10



parte iguais, cada parte será um décimo, isto é, *a unidade inteira é igual a 10 décimos*. Se dividirmos o mesmo comprimento em 100 partes iguais, cada parte será um centésimo e *cada décimo conterá 10 centésimos*. Do mesmo modo se veria que *1 centésimo é igual a 10 milésimos*, e assim por diante. Então:

Uma unidade inteira = 10 décimos
Um décimo = 10 centésimos
Um centésimo = 10 milésimos
Um milésimo = 10 décimos milésimos
Um décimo milésimo = 10 centésimos milésimos
Um centésimo milésimo = 10 milionésimos

90. *Decomposição da fração decimal em ordens sucessivas*. Assim como decompomos o número inteiro em suas ordens (957 igual a 9 centenas, cinco dezenas e 7 unidades) também podemos decompor a fração decimal em ordens decimais. Com efeito, podemos escrever

$$\frac{3527}{10000} = \frac{3000 + 500 + 20 + 7}{10000} = \frac{3000}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{20}{10000} + \frac{7}{10000}$$

ou, ainda, simplificando as três primeiras parcelas:

$$\frac{3527}{10000} = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{7}{10000}$$

NÚMEROS DECIMAIS

91. Mostramos que a relação entre cada unidade decimal e a imediatamente seguinte é a mesma que existe entre duas unidades inteiras sucessivas; e, ainda, que tôda fração decimal pode ser decomposta em unidades decimais, tal qual fazemos com os números inteiros. Daí resulta podermos estender às frações decimais o princípio da escrita dos números inteiros: Para isso, escrevemos, da esquerda para a direita, os algarismos que representam as unidades das ordens sucessivas de-

crescentes e usamos um sinal — *a vírgula* — para separar a parte inteira da parte decimal. A fração decimal assim representada chama-se **número decimal.** Tal qual como no número inteiro, o zero servirá para ocupar os lugares das unidades que o número decimal não possuir.

Damos abaixo um número decimal com as denominações de suas ordens inteiras e decimais

Inteiros								Decimais						
	Milhões	Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades	**Vírgula decimal**	Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos milésimos	Centésimos milésimos	Milionésimos
....	4	2	3	9	7	6	5	,	7	5	4	3	5	2 ....

Nota. Do que ficou dito resulta que sempre podemos dar a uma fração decimal a forma de número decimal: basta escrever o numerador da fração e nele separar, com a vírgula, tantos algarismos à direita quantos são os zeros do denominador. Assim,

a fração $\frac{78}{100}$ escreve-se 0,78; a fração $\frac{2537}{1000}$ escreve-se 2,537.

Se houver mais zeros no denominador do que algarismos no numerador, escrevem-se à esquerda dêste os zeros necessários para aquela separação. Exemplo:

a fração $\frac{27}{10000}$ escreve-se 0,0027.

92. De três modos podemos ler um número decimal:

1.º modo. Lê-se como um número inteiro, acrescentando o nome da última ordem decimal; assim: 40,725, lê-se: 42725 *milésimos*; 0,0329, lê-se: 329 *décimos milésimos*.

2.º modo. Lê-se separadamente a parte inteira e, a seguir, a parte decimal como no primeiro modo; por exemplo: 13,583, lê-se: *treze inteiros, quinhentos e oitenta e três milésimos*.

3.º modo. O mais freqüente é ler-se a parte inteira seguida da palavra *vírgula* e depois a parte decimal. Exemplo: 5,837, lê-se: *5, vírgula, 8372*.

Exercício de aplicação. Os discípulos devem ler os seguintes números, e depois o professor ditará êstes ou outros que êles escreverão.

1. 0,2	**7.** 10,99.	**13.** 2,051.
2. 0,83	**8.** 7,650.	**14.** 8,756.
3. 0,157	**9.** 0,70528.	**15.** 214.0055.
4. 2.025	**10.** 0,080645	**16.** 73,1250.
5. 3,508	**11.** 0,0005.	**17.** 6,0185.
6. 0.56	**12.** 2,30067.	**18.** 2,05.

Os discípulos escreverão com algarismos os seguintes números:

1. 35	centésimos.	**6.** 158	décimos milésimos.
2. 9	décimos.	**7.** 108	décimos milésimos.
3. 435	centésimos	**8.** 850	centésimos milésimos.
4. 5	inteiros e 48 milésimos	**9.** 1590	centésimos milésimos.
5. 80	milésimos	**10.** 500	milionésimos.

Reduzir números decimais à mesma denominação

93. Quando dois ou mais números decimais têm igual número de ordens decimais, êles são da mesma denominação; assim, 0,25, 0,53 e 0,87 são da mesma denominação.

Quando êles têm número desigual de algarismos na parte decimal são de diferentes denominações; assim, 0,5, 0,22 e 0,125 são de diferentes denominações.

Nota. *Prefixar* um algarismo a um número é escrever o algarismo à esquerda do número, e *acrescentar-lhe* um algarismo é escrevê-lo à direita; de sorte que, se prefixarmos 5 ao número 9, teremos 59, e se lhe acrescentarmos 5, teremos 95.

94. A redução de números decimais à mesma denominação baseia-se na propriedade seguinte:

Se acrescentarmos um ou mais zeros a um número decimal, não lhe alteraremos o valor. Com efeito, se acrescentarmos um zero a 0,2, teremos 0,20; se acrescentarmos dois zeros, teremos 0,200. Ora, dois décimos, vinte centésimos e duzentos milésimos são frações iguais.

inteiros	décimos	centésimos	milésimos
0,	2		
0,	2	0	
0,	2	0	0

Basta ver que se simplificarmos $\frac{20}{100}$ e $\frac{200}{1000}$, dividindo ambos os termos da 1.ª por 10 e da 2.ª por 100, obteremos os mesmos $\frac{2}{10}$.

Problema. Reduzir 0,5, 0,15, 0,04 e 0,125 à mesma denominação.

Solução. Iguala-se o número de algarismos decimais acrescentando zeros, como vemos no processo que está ao lado.

Processo

0,5	=	0,500
0,15	=	0,150
0,04	=	0,040
0,125	=	0,125

Regra. *Para se reduzirem números decimais à mesma denominação, iguala-se em todos o número de algarismos decimais, acrescentando-se zeros.*

Alteração no valor dos números decimais

95. Para se tornar um número decimal 10 vêzes maior, muda-se a vírgula da ordem onde está para a imediata à direita; para se tornar 100 vêzes maior, muda-se para a ordem seguinte, e assim por diante.

Demonstração. Se em 45,005 mudarmos a vírgula decimal para a ordem imediata à direita, o número ficará sendo 450,05, isto é, 10 vêzes maior, porque a parte inteira, que era 45, passou para 450, e a fração, que era 5 milésimos, tornou-se 5 centésimos. Se a mudarmos para a segunda ordem, o número ficará sendo 4500,5, isto é, 100 vêzes maior, etc.

96. Para se reduzir um número decimal à sua décima parte, bastará mudar a vírgula decimal para a ordem imediata à esquerda; para a reduzir à centésima parte, bastará mudá-la para a segunda ordem à esquerda, e assim por diante.

Demonstração. Se em 200,54 mudarmos a vírgula decimal para a ordem que está à esquerda, o número ficará reduzido a 20,054, isto é, ficará reduzido à sua décima parte, porque a parte inteira, que era 200 ficou reduzida a 20; e a fração, que era 54 centésimos, passou para 54 milésimos; e assim o número irá diminuindo o seu valor, cada vez que a vírgula fôr mudada para a esquerda.

Regra. *Para se tornar um número decimal dez, cem, ou mil vêzes maior, desloca-se a vírgula decimal uma, duas ou três ordens para a direita; e para reduzi-lo à sua décima, centésima ou milésima parte, remove-se a vírgula decimal uma, duas ou três ordens para a esquerda.*

Exercício de aplicação. Operar os seguintes exercícios:

	Respostas
1. Tornar o número 54,375 cem vêzes maior.	5437,5.
2. Reduzir o número 54,375 à sua centésima parte.	0,54375.
3. Reduzir o número 8540,5 à sua décima parte	854,05
4. Tornar o número 0,55 cem vêzes maior.	55.
5. Reduzir o número 0,55 à centésima parte.	0,0055.
6. Reduzir o número 7,5 à milésima parte	0,0075.

Transformar números decimais em frações ordinárias

97. Os números decimais podem ser fàcilmente transformados em frações ordinárias.

98. O número decimal tem na escrita um denominador oculto, que pode ser expresso por 1 e tantos zeros, quantos forem os algarismos decimais. Assim, 0,5 é igual a $\frac{5}{10}$. Esta fração simplificada dá a fração ordinária procurada, isto é $\frac{1}{2}$.

Problema. Transformar 0,25 em uma fração ordinária.

Solução. Como êste número decimal tem dois algarismos decimais; o seu denominador será 100; e a fração decimal equivalente é 25 centésimos, que simplificada dá 1/4.

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Regra. *Para se transformar um número decimal em uma fração ordinária, escreve-se como numerador o número decimal sem a vírgula, e como denominador 1 seguido de tantos zeros quantos forem os algarismos decimais.* Em seguida simplifica-se a fração decimal obtida.

Nota. Chamam-se algarismos decimais sòmente aqueles que ficam à direita da vírgula; assim, no número 18,15 os algarismos decimais são 1 e 5; em 0,024 os algarismos decimais são 0, 2 e 4.

Exercício. Transformar em frações ordinárias os seguintes números decimais:

1. 0,75	Resp.	$\frac{3}{4}$	**6.** 0,50	Resp.	?	**11.** 0,025	Resp.	?
2. 0,20	"	$\frac{1}{5}$	**7.** 0.58	"	?	**12.** 0,016	"	?
3. 0,125	"	$\frac{1}{8}$	**8.** 0.025	"	?	**12.** 0,03125	"	?
4. 0,375	"	$\frac{3}{8}$	**9.** 0,0625	"	?	**14.** 5,046	"	?
5. 4,050	"	$4\frac{1}{20}$	**10.** 0,325	"	?	**15.** 0,0728	"	?

Transformar frações ordinárias em números decimais

99. Uma fração ordinária, transformada em número decimal, pode produzir, ou uma **decimal exata,** ou uma **dízima periódica,** como notaremos nos dois exemplos seguintes:

1.º Problema. Transformar $\frac{3}{4}$ em um número decimal.

Solução. Acrescentando um zero ao numerador, e dividindo-o pelo denominador, ficam 2 de resto; acrescentando outro zero ao resto e continuando a divisão, não há mais resto. Então, como se juntaram dois zeros ao numerador, separam-se dois algarismos no quociente, que fica 0,75. Esta fração é **decimal exata,** porque não deixou resto na divisão.

```
30 | 4
20   ,75
 0
```

2.º Problema. Transformar $\frac{2}{3}$ em um número decimal.

20	3
20	,666
20	
2	

Solução. Acrescentando-se um zero ao numerador, e dividindo pelo denominador, ficam 2 de resto; acrescentando outro zero ao resto, e dividindo pelo denominador, ficam também 2 de resto; continuando a divisão, o quociente será sempre 6, deixando 2 de resto. O resultado é o que se chama uma **dízima periódica.** Na prática, acrescentaremos sòmente três zeros ao numerador, e apartaremos três algarismos no quociente, que ficará 0,666, isto é, 666 milésimos.

Regra. *Para se transformar uma fração ordinária em um número decimal, acrescentam-se um ou mais zeros ao numerador, e depois divide-se pelo denominador, e no quociente separam-se com a vírgula tantos algarismos decimais, quantos forem os zeros acrescentados. Se o quociente não tiver número suficiente, prefixam-se-lhe zeros.*

Exercício. Transformar em números decimais:

1. $\frac{4}{5}$	Resp.	0,8	**6.** $\frac{1}{4}$	Resp.	?	**11.** $\frac{2}{125}$	Resp.	?
2. $\frac{3}{4}$	"	0,75	**7.** $\frac{5}{20}$	"	?	**12.** $\frac{13}{40}$	"	?
3. $\frac{4}{25}$	"	0,16	**8.** $\frac{1}{400}$	"	?	**13.** $\frac{23}{500}$	"	?
4. $\frac{3}{40}$	"	0,075	**9.** $\frac{3}{200}$	"	?	**14.** $\frac{17}{25}$	"	?
5. $8\frac{7}{50}$	"	8,14	**10.** $5\frac{28}{500}$	"	?	**15.** $\frac{3}{250}$		

Adição

100. Como a adição de números decimais se opera do mesmo modo que a de números inteiros, não é necessário dar mais esclarecimentos além da regra.

Regra. *Para se somarem números decimais, escrevem-se as diferentes parcelas umas debaixo das outras, de sorte que as ordens da mesma denominação fiquem em coluna. Somam-se tôdas as parcelas como se fôssem números inteiros, e escreve-se a vírgula decimal na soma.*

Exercício de aplicação.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
0,9	0,25	0,005	4,55	8,125	10,85
0,5	0,08	0,0015	2,05	2,008	15,09
0,8	0,75	0,1450	1,08	3,25	17,007
0,15	0,155	0,3005	0,80	0,800	18,085
0,12	0,15	0,437	5,125	5,012	29,15
2,47			13,605		

7. Somar 0,75 + 0,075 + 0,0075 + 0,00075. Resp. ?
8. Somar 41,35 + 25,005 + 18,555 + 0,850. " ?
9. Somar 58,70 + 19,05 + 75,010 + 0,009. " ?
10. Somar 39,750 + 17.005 + 9,705 + 7,150. " ?

Subtração

101. Regra. *Para se subtrair um número decimal de outro, reduzem-se ambos à mesma denominação; escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, e, depois de se operar como em números inteiros, escreve-se a vírgula decimal no resto.*

Nota. Se o minuendo fôr um número inteiro, acrescentam-se-lhe a vírgula decimal e tantos zeros quantos forem os algarismos decimais do subtraendo.

Exercício de aplicação. Operar as seguintes subtrações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Minuendo	0,750	15,120	0,005	0,125	0,101
Subtraendo	0,155	8,750	0,002	0,005	0,081
Resto	0,595				

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)
4,005	25,001	150,010	192,	1,	20,705
2,750	12,008	149,990	165,725	0,0001	4,050

12. De 0,5 subtrair 0,0024 — Resp. 0,4976.
13. De 3 subtrair 0,003. — " 2,997.
14. De 13,5 subtrair 8,037. — " 5,463.
15. De 1000 subtrair 0,001. — " 999,999.

Multiplicação

102 Regra. *Para se multiplicarem números decimais, escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando e opera-se a multiplicação como se os dois fatôres fôssem números inteiros; no produto, separam-se com a vírgula tantos algarismos, quantos algarismos decimais tiverem ambos os fatôres; e, se o produto não tiver número suficiente, prefixam-se-lhe zeros até igualar o número.*

Para facilitar a compreensão desta regra, vamos resolver alguns casos que podem ocorrer na multiplicação decimal.

Solução. No primeiro caso, como há um algarismo decimal no multiplicando e outro no multiplicador, separam-se dois algarismos no produto, e o resultado será 63 inteiros.

No segundo caso, como há quatro algarismos decimais nos dois fatores, separam-se quatro algarismos no produto, e o resultado será 0,1875.

No terceiro caso, como os dois fatores têm quatro algarismos decimais, e o produto tem só dois algarismos, prefixam-se-lhe dois zeros e o resultado será 0,0075. Vêde a nota do n.º 98.

1.º	2.º	3.º
7,5	0,25	0,15
8,4	0,75	0,05
300	125	0,0075
600	175	
63,00	0,1875	

Exercício de aplicação. multiplicações.

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
Multiplicando	0,135	0,152	0,756	8,525	45,455	0,755
Multiplicador	0,005	0,089	0,845	0,025	0,805	0,755
Produto	0,000675					

(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)	(13.)
20,532	25,001	0,0755	0,0750	4,23	700,2	0,00024
875,	1,111	0,7500	0,088	3,05	400,7	0,00035

14. Multiplicar 1,035 por 17. Resp. 17,595.
15. Multiplicar 19 por 0,125. " 2,375.
16. Multiplicar 4000 por um milionésimo " 0.004.

Divisão

103. Na divisão decimal há dois casos a considerar, que são:

1.° Quando o dividendo tem menos algarismos decimais do que o divisor.

2.° Quando o dividendo tem mais algarismos decimais do que o divisor.

1.º Caso. Problema. Dividir 17,5 por 0,25.

Solução. Se ambos os têrmos da dvisão tivessem igual número de ordens decimais, não haveria dificuldade, operava-se como em inteiros; mas, como o dividendo tem menos um algarismo decimal do que o divisor, iguala-se o número com um zero, no que não se altera o valor do dividendo, porque 0,5 = 0,50. Opera-se depois como em números inteiros, e o quociente será 70 inteiros.

```
17,50 | ,25
17,5    70
00,0
```

Regra. *Quando o dividendo contém menos algarismos decimais do que o divisor, iguala-se o número, acrescentando-se zeros ao dividendo e opera-se como em inteiros.*

Operar as seguintes divisões:

1. $22,5 \div 0,25 = 90$ | **3.** $11,2 \div 0,14 = ?$ | **5.** $82,5 \div 1,65 = ?$
2. $5,25 \div 0,75 = ?$ | **4.** $8,4 \div 0,24 = ?$ | **6.** $2,56 \div 0,032 = ?$

2.º Caso. Problema. Dividir 0,5625 por 0,125.

Solução. Quando o dividendo tem mais algarismos decimais do que o divisor, iguala-se o número, separando-se no quociente, com a vírgula, os algarismos que faltarem. Ora, o dividendo tem quatro, e o divisor tem três; separa-se com a vírgula um algarismo no quociente, e ficará 4,5 (4 inteiros e 5 décimos).

```
,5625 | ,125
500     4,5
 625
 625
 000
```

Problema. Dividir 0,0075 por 0,15.

Solução. Efetuada a divisão, o quociente é 5, mas como o dividendo tem quatro algarismos, e o divisor tem só dois, temos de apartar dois algarismos no quociente, e como êste tem um algarismo só, prefixar-lhe-emos um zero e ficará 0,05 (cinco centésimos).

,0075	,15
75	05
00	

Regra. *Quando o dividendo tem mais algarismos decimais do que o divisor, separam-se no quociente tantos algarismos decimais quantos houver de diferença; e, se o quociente não tiver número suficiente, prefixam-se-lhe zeros até completar a diferença.*

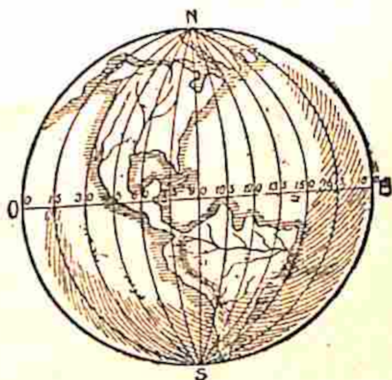
Exercício de aplicação. Operar as seguintes divisões:

1. 86,075÷2,75=? Resp. 31,3
2. 24,73704÷3,44=? " 7,191
3. 37,41÷10=? " 3,741
4. 9,9÷0,0225=? 440,
5. 0,000343÷3,43=? " 0,0001
6. 11÷0,11=? Resp. ?
7. 0,11÷11=? " ?
8. 7,58÷200÷? " ?
9. 15,625÷2,5=? " ?
10. 17,28÷0,0144=? " ?

Nota. Para mais amplo conhecimento dos números decimais, vêde a nossa **Aritmética Progressiva.**

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

104. O sistema de pesos e medidas, adotado no Brasil por lei n. 1157, de 26 de Junho de 1862, e o único autorizado entre nós, desde 1 de Julho de 1873, é o **Sistema métrico decimal,** organizado em França, no século XVIII, por uma comissão de homens notáveis pelos seus conhecimentos matemáticos.



Esta comissão tomou como base do novo sistema a distância do Equador ao Polo Norte, segundo o meridiano de Paris; calculou esta distância e achou que tinha 5130740 toesas; dividiu esta distância em 10 milhões de partes iguais, e tomou o comprimento de uma destas partes para a dimensão do metro. De sorte que o *metro tem a décima milionésima parte da distância do Equador ao Polo.*

Nota I. Posteriormente verificou-se uma pequena diferença entre o comprimento do metro padrão e o da décima milionésima parte do quadrante terrestre; entretanto, essa diferença pela sua insignificância pode ser considerada na prática como inexistente.

Nota II. Na figura ao lado, vê-se representada entre o ponto **E** e o ponto **N** a distância do Equador ao Polo Norte.

105. A palavra **metro** vem do grego *metron* que significa *medida*. Este têrmo já era usado na composição de outras palavras, como termômetro, cronômetro, barômetro, etc.

Este sistema chama-se *métrico*, porque tôdas as suas medidas têm as dimensões tiradas do metro; chama-se também *decimal*, porque tôdas as suas medidas estão sujeitas à divisão decimal, e vulgarizou-se ràpidamente por tôda a Europa e América, por ser muito vantajoso, simples e de fácil compreensão.

Principais unidades

106. As unidades principais dêste sistema são:

Metro, unidade de comprimento.

Litro, unidade de capacidade para líquidos e sêcos.

Quilograma, unidade de massa (vulgarmente chamada *peso*).

Are, unidade agrária, isto é, para terrenos de cultura.

107. As unidades maiores do que a principal chamam-se **múltiplos** e as menores chamam-se **súbmultiplos** ou **divisões.**

Para se exprimirem os múltiplos das unidades ou medidas principais, adotaram-se as seguintes palavras gregas:

Míria, que significa dez mil 10000

Quilo, que significa mil 1000

Hecto, que significa cem 100

Deca, que significa dez 10

Para se exprimirem os submúltiplos ou divisões, adotaram-se as seguintes palavras latinas:

Deci, que significa a décima parte 0,1

Centi, que significa a centésima parte 0,01

Mili, que significa a milésima parte 0,001

108. Estas palavras prefixas ao nome de cada unidade exprimem os seus múltiplos e divisões, como se vê abaixo:

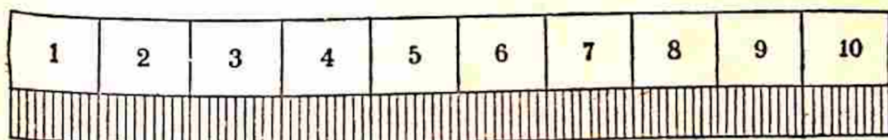
	Comprimento	Pêso	Capacidade	Agrária	Valores
Múltiplos	....	Tonelada	....	....	1 000 000
	Quilômetro	Quilograma	Quilolitro	....	1 000
	Hectômetro	Hectograma	Hectolitro	Hectare	100
	Decâmetro	Decagrama	Decalitro	....	10
	Metro	**Grama**	**Litro**	**Are**	**Unidade**
Divisões	Decímetro	Decigrama	Decilitro	....	0,1
	Centímetro	Centigrama	Centilitro	centiare	0,01
	Milímetro	Miligrama	Mililitro	....	0,001

Nota. Embora a unidade principal de pêso seja o **Quilograma,** toma-se o grama para base na formação dos múltiplos e submúltiplos.

109. O **Metro** tem aproximadamente o comprimento da décima milionésima parte da distância do Equador ao Polo, e é a medida fundamental do sistema.

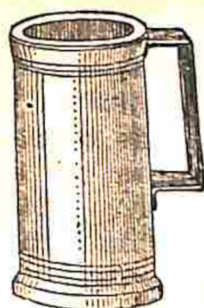
O metro divide-se em 10 decímetros;
o decímetro divide-se em 10 centímetros;
o centímetro divide-se em 10 milímetros.

Nota. A escala abaixo mostra o tamanho exato de um decímetro dividido em 10 centímetros, e cada centímetro dividido em 10 milímetros.



110. Para medir grandes distâncias usa-se o *quilômetro*. De sorte que a extensão de uma estrada, que mede dois mil metros, diz-se que tem 2 quilômetros; a que tem três mil e quinhentos metros, diz-se que tem 3 quilômetros e 500 metros, etc.

111. O **litro** tem a capacidade de um decímetro cúbico, isto é, tem a capacidade de um cubo com um decímetro de aresta. Para se medir líquido, dá-se ao litro a forma cilíndrica, como se vê na figura ao lado.



Forma do litro

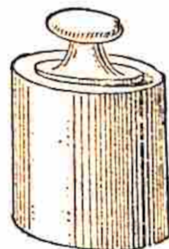
O litro divide-se em 10 decilitros; o decilitro divide-se em 10 centilitros; o centilitro divide-se em 10 mililitros.

Os múltiplos do litro são o decalitro (dez litros) e o hectolitro (cem litros).

112. O grama tem aproximadamente o pêso de um centímetro cúbico de água distilada na temperatura de quatro graus centígrados.

O grama divide-se em 10 decigramas; o decigrama divide-se em 10 centigramas; o centigrama divide-se em 10 miligramas.

113. As frações do quilograma são geralmente expressas em gramas. Exemplo: 8 quilogramas e 750 gramas.



Forma do quilograma

No comércio usa-se quase sempre a palavra **quilo** por abreviatura de quilograma.

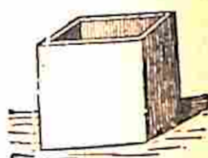
114. Para se avaliarem pesos grandes, adota-se a

Tonelada métrica que vale 1000 kg. ou 1.000.000 de gramas.

É fácil avaliar as unidades de pêso notando que o **grama** tem o pêso de um centímetro cúbico de água distilada;

o **quilograma** tem o pêso de um decímetro cúbico de água distilada;

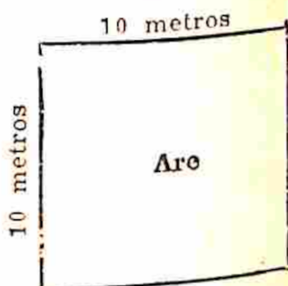
a **tonelada métrica** tem o pêso de um metro cúbico de água distilada.



Centímetro cúbico

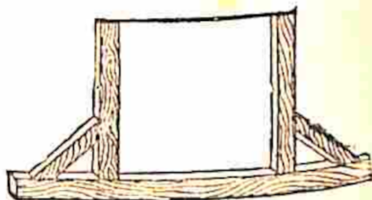
115. Are é a superfície de um quadrado que tem 10 metros de lado; é igual a 100 metros quadrados e serve para medir matas e terrenos de cultura.

O múltiplo do are é o **hectare,** que tem 100 ares; e o submúltiplo é o **centiare** ou a centésima parte do are, equivalente a um metro quadrado.



Nota. Daremos mais esclarecimentos sôbre o are, quando o empregarmos na medição de terrenos.

116. O **estéreo** é empregado para medir lenha, e consta de dois esteios fincados em um estrado de madeira, tendo cada um a altura de um metro, e havendo também entre êles igual distância.



As achas de um metro de comprimento são dispostas em camadas, sôbre o estéreo, até chegar à altura dos esteios, e assim se obtém um estéreo de lenha que equivale ao metro cúbico. Entre nós, a lenha é vendida às carradas, às talhas e aos feixes.

Unidades monetárias

117. A unidade monetária do Sistema métrico francês é **o franco,** moeda de prata que não foi adotada no Brasil.

118. O Decreto-Lei de 5 de Outubro de 1942 instituiu o **cruzeiro** como unidade de moeda no Brasil.

O cruzeiro tem um submúltiplo: o **centavo,** que é a centésima parte do cruzeiro.

Sempre que se escrever uma importância em dinheiro, isto é, sempre que um número exprimir dinheiro, deve êle ser precedido do símbolo Cr$.

Desde que já sabemos ler e escrever os números decimais, é muito fácil ler e escrever as importâncias: basta considerar

o número de cruzeiros como unidades e o número de centavos como centésimos. No caso de um número exato de cruzeiros, colocam-se dois zeros após a vírgula para exprimir que não há centavos. Exemplos:

2 cruzeiros e 40 centavos	Cr$ 2,40
85 centavos	Cr$ 0,85
5.832 cruzeiros e 70 centavos	Cr$ 5.832,70
45 cruzeiros	Cr$ 45,00

Para se ler um número que exprima dinheiro, deve-se, então, ler primeiramente a parte inteira acrescentando-se a palavra *cruzeiros* e em seguida ler a parte decimal acrescida da palavra *centavos*. Assim,

Cr$ 5,30 lê-se 5 *cruzeiros* e 30 *centavos*.

Observação: Para quantias menores do que o cruzeiro, pode-se usar o centavo como unidade abreviando *cts*. Por exemplo: em vez de Cr$ 0,50 pode-se escrever 50 cts.

Antes desta lei havia três unidades principais, que damos a seguir, pois a elas se referem a moedas que ainda estão circulando·

Unidade inferior	Um real
Unidade média	Mil réis
Unidade superior	Conto de réis

Além disso a quantia de 20 réis era denominada *vintém*; e a de 100 reis chamava-se *tostão*. O mil réis correspondia, portanto, a dez tostões.

Para se indicar uma quantia nessas unidades escrevia-se um cifrão ($) entre as centenas e os milhares; assim

Um mil réis escreve-se	1$000
4 mil e 500 réis escreve-se	4$500

Para indicar um *real*, escreve-se $001.

Do mesmo modo,

40 réis	$040
125 réis	$125

A passagem do antigo sistema para o novo foi baseada na relação: o mil réis (equivalente a dez tostões) passou a chamar-se *cruzeiro* e como o cruzeiro tem 100 centavos, o tostão (100 réis) tomou o valor de 10 centavos.

No antigo sistema, o milhão de réis tinha o nome de *conto de réis*; entre o algarismo das centenas de milhar e o das unidades de milhão, colocam-se dois pontos; assim

8 *contos de réis* escreve-se	8:000$000
35 *contos* e 840 *mil réis*	35:840$000
7 *contos*, 425 *mil* e 600 *réis*	7:425$600

Exercício de aplicação. O aluno lerá as seguintes quantias:

Cr$ 7,50	Cr$ 34,60	Cr$ 700,00	Cr$ 25.000,00
Cr$ 4,80	Cr$ 40,70	Cr$ 300,00	Cr$ 38.000,00
Cr$ 5,00	Cr$ 35,00	Cr$ 254,30	Cr$ 728.453,40
Cr$ 3,00	Cr$ 28,00	Cr$ 483,20	Cr$ 145.328,70

Abreviaturas do sistema métrico

119. No sistema métrico há as seguintes abreviaturas:

1.º *O nome de cada unidade exprime-se com a sua letra inicial minúscula logo a seguir ao número*. Assim, 5m lê-se: 5 metros; 4g lê-se: 4 gramas; 2*l* lê-se: 2 litros, etc.

Como as unidades métricas têm a divisão decimal, as suas frações ou submúltiplos escrevem-se do mesmo modo que os números decimais; sòmente as palavras *décimo, centésimo* e *milésimo* se exprimem por *deci, centi* e *mili* juntas com o nome da unidade. Assim, cinco decímetros escrevem-se 0,5m, cinco centímetros escrevem-se 0,05m, e cinco milímetros escrevem-se 0,005m.

2.º *Quando as frações ou submúltiplos não estão unidos a inteiros, podem ser também representados por duas letras minúsculas, sendo uma a inicial do submúltiplo e a outra inicial da unidade*. Assim, 5dm significa 5 decímetros; 4cm significa 4 centímetros; 3mg significa 3 miligramas; 15mm significa 15 milímetros, etc.

3.º *A abreviatura dos múltiplos é formada também por duas letras iniciais minúsculas*.

Assim: 18hm lê-se 18 hectômetros; 15,30 hg lê-se 15 hectogramas e 30 gramas; 18 hl lê-se 18 hectolitros, etc.

Observação: decâmetro, decagrama e decalitro abreviam-se respectivamente: **dam., dag.** e **dal.** Assim: 35 decâmetros abrevia-se 35 dam; 65 decagramas indica-se 65 dag; 24 dal lê-se: 24 decalitros.

Quanto às palavras formadas com o prefixo **quilo,** embora por extenso se escrevam com **qu** (quilograma, quilômetro), suas abreviaturas se escrevem com **k.** Assim 18 km lê-se 18 quilômetros e 23 kg lê-se 23 quilogramas.

Exercício de aplicação. Ler as seguintes medidas:

1. 50,15m	**6.** 25cm	**11.** 0,75m	**16.** 35hl
2. 9,05g	**7.** 7dl	**12.** 0,015g	**17.** 15kg
3. 15,08*l*	**8.** 9dg	**13.** 0,008m	**18.** 8,250km
4. 8,015g	**9.** 15mg	**14.** 0,5*l*	**19.** 12,750kg
5. 6.125m	**10.** 20mm	**15.** 0,105g	**20.** 7,80km

Operações com quantidades métricas

120. As quatro operações sôbre as quantidades métricas e com as importâncias expressas em cruzeiros seguem em tudo as regras das operações sôbre decimais, e resolvem-se do mesmo modo.

Problema. Somar 15,45m + 8,50m + 16,25m

Solução. Escrevem-se as três quantidades em coluna, e opera-se como se elas fôssem números inteiros, e na soma escrevem-se a vírgula decimal e a letra inicial. A soma das três quantidades é 40 metros e 20 centímetros. (Vêde n. **100**).

```
 15,45m
  8,50m
 16,25m
 ------
 40,20m
```

1. Um negociante vendeu de uma peça de pano 8,50m; vendeu mais 7,25m; vendeu depois 4,75m e ficou um resto de pano com 1,50m; quantos metros tinha a peça? Resp. 22m.

2. Somar as seguintes quantidades de vinho: 20,5*l* + + 10,8*l* + 35,7*l* + 20,2*l*. Resp.?

3. Um anel pesava 20,55g; outro pesava 18,08g e outro 11,37g; qual era o pêso dos três anéis? Resp.?

4. Qual é a soma de 20,5 + 15,015m + 32,10m + 19,075m?

5. Comprei um livro por Cr$ 6,80, um lápis por Cr$ 0,40 e um caderno por Cr$ 0,70. Quanto gastei? Resp.?

121. Problema. De 21,15m tirando 17,75m quanto resta?

Solução. Opera-se a subtração como se os dois têrmos fôssem números inteiros, e no resto escrevem-se a vírgula decimal e a letra inicial. O resto é 3 metros e 40 centímetros (Vêde n.º **113**).

```
 21,15m
 17,75m
 ------
  3,40m
```

1. Um garrafão tinha 9,5*l* de vinagre, tirando-se dêle 5,8*l*, quanto restou? Resp. 3,7*l*.

2. De uma barra de prata que pesava 84,15g cortando um pedaço que pesava 35,75g, quanto restou? Resp.?

3. De 25,440 kg. tirando 17,750 kg. quanto resta? Resp. 7,690 kg.

4. Achar a diferença entre 29,90m e 39,80 m. Resp.?

5. Um negociante devia a um banco a quantia de Cr$ 2.138,40. Pagou Cr$ 1.835,60. Quanto ficou devendo?

122. Problema. Em quanto importam 5,75m de chita a Cr$ 12,40 cada metro?

Solução. Deve-se multiplicar o preço de um metro pelo número de metros. Opera-se a multiplicação como se fôssem números inteiros, e como há dois algarismos decimais no multiplicando e dois no multiplicador, separam-se quatro algarismos decimais no produto, que ficará 71,3000 ou, ainda, Cr$ 71,30.

```
    12,40
     5,75
  -------
     6200
    8680
   6200
  -------
  71,3000
```

1. Em quanto importam 15,50m de flanela a Cr$ 3,80 o metro ? Resp. Cr$ 58,90.

2. Custando um grama de platina Cr$ 40,00, quanto devem custar 8,15g ? Resp. ?

3. Quantos metros de tecido têm 9 peças, medindo cada uma 75,25m ? Resp. ?

4. Se um litro de azeite custa Cr$ 26,80, quanto devem custar 8,5*l* ? Resp. ?

123. Problema. Dividir 25,75m em 5 partes iguais

Solução. Como no dividendo há dois algarismos decimais, apartam-se também dois no quociente, que ficará 5,15, isto é, 5,15m. (Vêde n.º **103**).

```
25,75 | 5
 0,25   5,15
    0
```

1. Comprei 25,60m de chita por Cr$ 115,20, quanto me custou cada metro ? Resp. Cr$ 4,50.

2. Comprei 7,5*l*, de vinho por Cr$ 22,50, a como me ficou cada litro ? Resp. ?

3. Doze colheres iguais de prata pesaram 194,88g, quanto deverá pesar cada uma ? Resp. ?

4. Comprei 25,85m de fita por Cr$ 206,80, quanto me custo cada metro ? Resp. ?

Reduções métricas

124. Para reduzirmos medidas métricas a medidas antigas e vice-versa, é necessário primeiro compararmos umas com as outras, para vermos que relação há entre elas. Vamos começar pelas medidas de comprimento.

O **metro** substituiu *a braça, a vara, o côvado, o palmo e a polegada* do antigo sistema de medidas. Comparando essas medidas com as do sistema métrico, achamos a seguinte relação:

Braça	tem 2,2m	Pé	tem 0,33m
Vara	" 1,1m	Palmo	" 0,22m
Côvado	" 0,66m	Polegada	" 0,027m

Problema. 132 metros quantos côvados são ?

Solução. Um metro tem 100 centímetros, e 132 metros têm 132 × 100 = 13200 centímetros; dividindo êstes centímetros por 66, que é o número de centímetros que tem um côvado, achamos 200, que é o número de côvados.

132 × 100 = 13200

13200 ÷ 66 = 200

Regra. *Para se reduzirem metros a medidas antigas, reduz-se o número de metros a centímetros ou milímetros e êstes dividem-se pelo número de centímetros ou milímetros que tiver a medida antiga.*

Problema. 50 còvados quantos metros são?

Solução. Um côvado tem 66 centímetros, e 50 côvados têm 66 × 50 = 3300 centímetros; dividindo agora êstes centímetros por 100, que é o número de centímetros que tem o metro, achamos 33 metros exatos.

50 × 66 = 3300

33.00

Para se dividir um número por 100, bastará cortar dois algarismos à direita dêsse número. (Vêde n.º 46).

Regra. *Para se reduzirem medidas antigas de comprimento a metros, multiplica-se o número de unidades pela quantidade de centímetros ou milímetros que a medida tiver, e divide-se o produto por 100 ou por 1000.*

Nota. As reduções das outras unidades métricas operam-se segundo o raciocínio das duas soluções acima, e por isso não as reproduziremos nas outras medidas.

125. O **metro** e o **quilômetro** comparado com as medidas itinerárias antigas têm a seguinte relação:

	Metros
Légua brasileira de sesmaria tem	6600
Légua marítima de 20 ao grau tem	5555
Milha marítima tem	1852
Milha inglêsa tem	1609

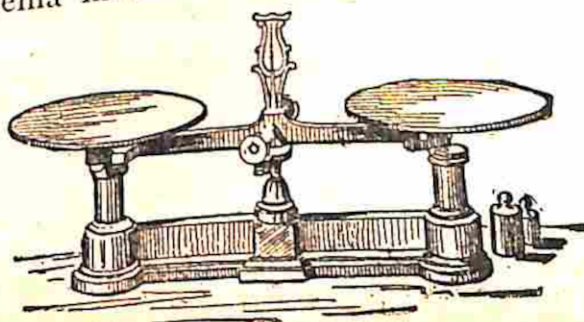
126. O **litro** e o seu múltiplo hectolitro (100 litros) substituíram o *alqueire, a quarta, o selamim, o almude, a canada e o quartilho* do sistema antigo.

Pipa	tem	480 litros	Alqueire	tem	36,27*l*
Canada	"	2,66*l*	Quarta	"	9,07*l*
Quartilho	"	0,66*l*	Selamim	"	2,27*l*

127. A **tonelada métrica,** o **quilograma** e o **grama** substituíram a *tonelada, o quintal, a arroba, a libra, a onça, a oitava e o grão* do sistema antigo. Estas unidades correspondem aos seguintes pesos do sistema métrico:

A tonelada	tem	793,162 kg.
O quintal	"	58,750 kg.
A arroba	"	14,680 kg.

A libra	tem	459,05 g.
A onça	"	28,68 g.
A oitava	"	3,58 g.



Superfícies

128. Superfície é uma grandeza que tem duas dimensões que se chamam comprimento e largura, como as áreas dos jardins, dos páteos, dos recintos, etc.

Se a superfície tem os quatro lados iguais e os ângulos retos, chama-se **superfície quadrada,** se é mais comprida do que larga, chama-se **superfície retangular.**

A superfície de um quadrado que tem um metro de lado é um metro quadrado, e escreve-se abreviadamente: **m².** A superfície de um quadrado que tem um centímetro de lado é um centímetro quadrado, e escreve-se **cm².**, etc. A figura ao lado mostra um centímetro quadrado na sua verdadeira grandeza.



129. Para conseguirmos a medida de uma superfície, temos de medir o seu comprimento e a sua largura. Faz-se esta medição com uma trena, corda ou corrente estendida sôbre o chão

Trena é uma fita de linho fixa a um eixo de uma caixinha redonda de couro, no qual ela se enrola. Todo o seu comprimento, que varia desde 5 metros até 50, está dividido por traços que marcam, de um lado, metros divididos em centímetros, e de outro, polegadas inglêsas.



130. Depois de obtermos as duas dimensões de um terreno retangular, é fácil calcular a medida da sua superfície.

Problema. Como poderemos saber quantos quadrados pequenos contém o quadrado grande, sem os contarmos um a um?



Solução. Contando os quadrados pequenos da primeira carreira, achamos 4, e contando o número de carreiras achamos também 4, então o quadrado grande tem 4 vêzes 4, que são 16 quadrados pequenos. Acha-se pois a quantidade multiplicando-se o número que há na largura pelo número que há no comprimento. Se cada quadrado pequeno medisse um metro, o quadrado grande teria $4 \times 4 = 16$ metros quadrados.

Problema. Como poderemos saber quantos quadradinhos tem o retângulo ao lado, sem os contar um a um?



Solução. A primeira carreira tem 3, e o número de carreiras é 5; então, tem 5 vêzes 3, que são 15. Se cada um daqueles quadradinhos tivesse um metro quadrado, então o retângulo, tendo 3 metros de largura e 5 de comprimento, mediria $3 \times 5 = 15$ metros quadrados.

Daqui por diante chamaremos *área* à medida de uma superfície.

Regra. *Para se achar a área de um retângulo, multiplica-se a sua largura pelo seu comprimento; a área do quadrado obtém-se multiplicando o lado por si mesmo.*

Nota. Se a superfície não tiver a forma restangular, então é necessário recorrer às regras especiais, que se podem achar na nossa **Aritmética Progressiva.**

1. Qual é a área de uma praça retangular que tem 35 metros de comprimento e 22 de largura? Resp. 770 m².

2. Qual é a área de um armazém retangular que tem 17,5m de comprimento e 8,4m de largura? Resp. 147 m².

3. Quantos metros quadrados tem um jardim retangular que mede 90 metros de comprimento e 80 de largo? Resp. ?

131. Para acharmos quantos ares tem um campo ou terreno retangular, mediremos o seu comprimento e a sua largura, e o produto destas dimensões mostrará o número de metros quadrados que tem a superfície do campo ou terreno. Ora, como o are tem 100 metros quadrados, dividiremos o número de metros quadrados que tiver o campo, por 100, e teremos o número de ares; dividindo ainda o número de ares por 100, teremos o número de hectares. Assim, 80000 metros quadrados são 800 ares ou 8 hectares.

Problema. Quantos ares tem uma roça com 200 metros de comprimento e 150 de largura?

Solução. A roça tem 200 metros de comprimento e 150 de largura, então tem 150 × 200 = 30000 metros quadrados; e, como o are tem 100 metros quadrados, dividiremos 30000 por 100, e teremos 300 ares.

$$\begin{array}{r} 150 \\ 200 \\ \hline 300{,}00 \end{array}$$

Regra. *Para se reduzirem metros quadrados a ares, divide-se o número de metros por 100; e para se reduzirem ares a hectares divide-se o número de ares por 100.*

Nota. Esta divisão pode ser operada só com a vírgula, separando dois algarismos, para reduzir metros quadrados a ares; e separando quatro para reduzir metros quadrados e hectares (Vêde n.º **46**).

1. Quantos ares tem uma mata que mede 168 metros de largura e 242 de comprimento?

Resp. 406 ares e 56 metros quadrados.

2. Quantos hectares tem uma fazenda que mede 1,600km e 2,5km de comprimento? Resp. 400 hectares.

3. Contratei uma plantação de milho à razão de Cr$ 50,00 por are; ora, tendo a roça 450 metros de comprimento e 80 de largura, quanto tive de pagar? Resp. Cr$ 18.000,00.

Nota. Apesar do are ter sido adotado por lei no Brasil, perdura entre os lavradores, o uso antigo de medir matas, terrenos, campos, roças, etc., por alqueire de terra.

O alqueire de terra é o espaço necessário para plantar um alqueire de milho, e varia de tamanho, conforme o modo de plantar o milho. Em S. Paulo, o alqueire de terra tem 5.000 braças quadradas, isto é, 100 braças de comprimento e 50 de largura. Em algumas partes de Minas, o alqueire tem 7,200 braças quadradas, e em outros lugares tem até 10000 braças quadradas.

O alqueire de terra divide-se em 4 quartas de terra; a quarta divide-se em 8 pratos, cada prato de terra deve ter 600 covas, e cada cova deve levar 5 grãos de milho.

Exprimir uma fração do metro quadrado em unidades menores

132. Na medição das superfícies, nem sempre encontramos um número exato de metros quadrados; muitas vêzes achamos também frações do metro quadrado, e para podermos exprimir essas frações em decímetros quadrados, centímetros quadrados ou milímetros quadrados, é necessário compreendermos a seguinte divisão das unidades de superfície:

133. O metro quadrado tem 10 decímetros de comprimento e 10 de largura, e por isso, tem $10 \times 10 = 100$ decímetros quadrados. Então, um decímetro quadrado é a a centésima parte do metro quadrado.

O metro quadrado tem 100 centímetros de comprimento e 100 de largura, e por isso, tem $100 \times 100 = 10000$ centímetros quadrados. Então, um centímetro quadrado é a décima milésima parte do metro quadrado.

O metro quadrado tem 1000 milímetros de comprimento e 1000 de largura, e por isso tem $1000 \times 1000 = 1000000$ de milímetros quadrados. Então, um milímetro quadrado é a milionésima parte do metro quadrado.

Nota. Um decímetro é a décima parte do comprimento do metro, mas um decímetro quadrado não é a décima parte do metro quadrado. Como vimos acima, um metro quadrado tem 100 decímetros quadrados, e um só decímetro quadrado é a centésima parte do metro quadrado, ao passo que um décimo do metro quadrado tem 10 decímetros quadrados.

134. As medidas de superfície seguem a divisão centesimal: assim,

um metro quadrado tem 100 decímetros quadrados;
um decímetro quadrado tem 100 centímetros quadrados;
um centímetro quadrado tem 100 milímetros quadrados;

Problema. Leia a seguinte quantidade: 4,6 m².

Solução. Esta quantidade representa 4 metros quadrados e 6 décimos de um metro quadrado. Ora, um metro quadrado tem 100 decímetros quadrados, e um décimo de 100 decímetros quadrados é 10 decímetros quadrados, e 6 décimos são 60 decímetros quadrados. A quantidade acima lê-se: 4 metros quadrados e 60 decímetros quadrados.

Regra. *Para se exprimirem as frações de um metro quadrado em decímetros, centímetros ou milímetros quadrados, divide-se a fração do metro em classes de dois algarismos, começando pela vírgula, sendo a primeira classe decímetros quadrados, a segunda centímetros quadrados, e a terceira, milímetros quadrados.*

Nota. Desde que as unidades de superfície se formam na razão centesimal, isto é, de 100 em 100, são precisos dois algarismos para cada ordem, e à que tiver só um algarismo, acrescenta-se um zero.

Exercício de aplicação. Problemas para resolver:

1. Como se lê a seguinte quantidade. 32,292874m² ?

Solução. A fração desta quantidade, dividida em classes, fica 29, 28, 74; então lê-se: 32 metros quadrados, 29 decímetros quadrados, 28 centímetros quadrados e 74 milímetros quadrados. Ou 32 metros quadrados e 292874 milímetros quadrados.

2. Quanto mede uma superfície retangular que tem 2,5m de largura e 3,4m de comprimento? Resp. 8,50m².

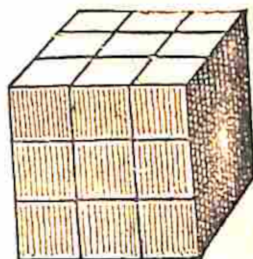
3. Quanto mede uma superfície retangular que tem 4,18m de comprimento e 1,15m de largura? Resp. 4,8070m².

4. Qual é a superfície de uma mesa retangular que tem 0,66m de largura e 1,54m de comprimento? Resp. 1,0164m².

Volumes

135. O sólido limitado por seis faces quadradas e iguais chama-se *cubo*. É a forma do dado de jogar.

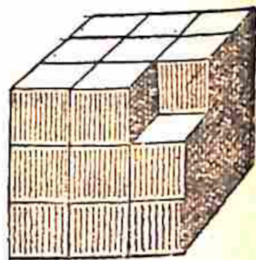
O sólido limitado por 6 faces retangulares, iguais duas a duas é um *paralelepípedo retângulo* ou *bloco retangular*. É a forma comum das caixas, dos fardos, das tábuas, dos muros, etc.



136. Nestes sólidos a porção de reta formada pelo encontro de duas faces chama-se *aresta*. Como as faces do cubo são tôdas quadradas e iguais, as suas arestas também são iguais entre si e têm o tamanho do lado dêsses quadrados.

O bloco retangular tem 12 arestas com três tamanhos diferentes: são as três *dimensões*: comprimento, largura e altura.

137. Para medirmos uma peça de fita, tomamos só o seu comprimento, para medirmos a superfície de um campo, tomamos o seu comprimento e a sua largura, e para medirmos o volume de um caixão, tomamos o seu comprimento, largura e altura.



Problema. Qual é o volume de um cubo que tem 3 centímetros de aresta?

Solução. Para resolvermos fàcilmente êste problema, observaremos o primeiro diagrama. Êle representa um sólido que, na face de cima, mede 3cm de comprimento e 3 de largura, e por isso esta face tem uma superfície de 3×3=9 centímetros quadrados (n.º 130). Se êste corpo tivesse um só centímetro de altura, teria o volume de 9 × 1 = 9 centímetros cúbicos. Se tivesse 2 centímetros de altura, teria 9 × 2 = 18 centímetros cúbicos; mas como tem 3 centímetros de altura, tem o volume de 9 × 3 = 27 centímetros cúbicos. O segundo diagrama, porque lhe falta um centímetro cúbico, tem 26.

Regra. *Para se achar o volume dos blocos retangulares, faz-se o produto das três dimensões (comprimento, largura e altura) avaliados na mesma medida. No caso do cubo basta fazer um produto de três fatôres iguais à aresta.*

Observação. Se as dimensões do sólido estiverem avaliadas em milímetros, o volume será expresso em milímetros cúbicos; se estiverem avaliados em metros, o volume será expresso em metros cúbicos; e assim por diante.

1. Qual é o volume de um caixão que tem 4 metros de comprimento, 3 de largura e 2 de altura? Resp. 24m³.

2. Qual é o volume de um muro que tem 20 metros de comprimento, 1,50m de largura e 4 de altura? Resp. 120m³.

3. Um corte de uma estrada de ferro mede 45 metros de comprido, 5 de largo e 12 de alto; quantos metros cúbicos de terra se tiraram dali?

Resp. 2700m³.

4. Quantos litros de água contém uma caixa que mede 15 decímetros de comprimento, 8 de largura e 10 de altura, sabendo-se que 1 litro de água ocupa o espaço de 1 decímetro cúbico?

Resp. 1200 litros.

NÚMEROS COMPLEXOS

139. Um número se diz *complexo* quando se refere a diferentes unidades, que não são, entretanto, subdivisões decimais da mesma unidade. Por exemplo: 3 *dias* 5 *horas* 22 *minutos* é um número complexo, porque não há relação decimal entre o dia, e a hora, nem entre a hora e o minuto. Com efeito: o dia tem 24 horas e a hora tem 60 minutos.

Outro exemplo: 3 dias e 2 horas.

Se em vez de 3 dias 2 horas, disséssemos 74 horas, teríamos um número *incomplexo* porque aí o tempo está referido a uma unidade única (hora).

Nota. O Sistema Métrico Decimal tem as suas unidades sujeitas à divisão decimal, mas, cumpre atender a que as unidades do tempo, e de ângulo e de moeda inglêsa não estão sujeitas ao sistema decimal; além disso os livros escritos antes de ser adotado o Sistema Métrico Decimal se referem às nossas unidades antigas, também não sujeitas à divisão decimal; daí a necessidade de se conhecerem as operações sôbre complexos.

Antes de entrarmos nestas operações, é necessário que os discípulos se familiarizem com a formação das seguintes unidades:

140. Unidades de tempo

Século	tem	100 anos.		Hora	tem	60 minutos.
Lustro	"	5 "		Minuto	"	60 segundos.
Ano	"	12 meses.		Ano comum	tem	365 dias.
Mês	"	30 ou 31 dias.		" bissexto	"	366 "
Semana	"	7 dias.		" comercial	"	360 "
Dia	"	24 horas.		Mês comercial	"	30 "

Os meses de Janeiro, Março, Maio, Julho, Agôsto, Outubro, e Dezembro têm 31 dias; os de Abril, Junho, Setembro e Novembro têm 30.

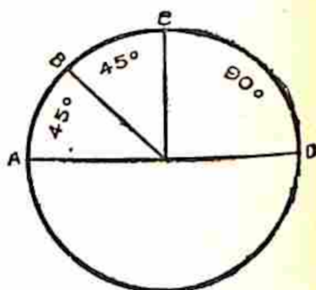
Nota. No ano comum, o mês de Fevereiro tem 28 dias, e no ano bissexto tem 29.

Todo ano bissexto é exatamente divisível por 4; para sabermos se um ano é bissexto, bastará dividi-lo por 4, e, se deixar resto, será ano comum; se não deixar resto, será bissexto; assim, os anos de 1872, 1876 e 1880 foram bissextos. Não estão compreendidos nesta regra os anos centenários.

Os anos centenários são os que terminam em duas ou mais cifras, como 1600, 1700 e 1800, etc. Todo ano centenário que fôr exatamente divisível por 400, será bissexto; assim, o ano de 1600 foi bissexto, e os de 1700, 1800 e 1900 foram comuns.

141. Unidade do ângulo e de arco

A circunferência de um círculo divide-se em 360 graus; o grau divide-se em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos. O grau se representa por °; o minuto por ′, e o segundo por ″. De sorte que 5°,5′,5″ lê-se: 5 graus, 5 minutos e 5 segundos.



Nota. Na circunferência do círculo ao lado, o arco que liga o ponto **A** ao ponto **B** tem 45°; o arco que liga **A** a **C** tem 45°+45°=90°; e o arco que liga **A** a **D**, que é meio círculo, tem 90° + 90° = 180°.

142. Unidades da moeda inglêsa







A libra esterlina tem 20 shillings.	A libra se representa por £.
Shilling " 12 pence.	O shilling por s.
Penny " 4 farthings.	O penny por d.

De sorte que £5. 7s. 2d. lê-se: 5 libras, 7 shillings e 2 pence.

Nota. O plural de penny é pence. Os farthings escrevem-se na forma de uma fração do penny; assim 1 penny e 1 farthing escrevem-se $1\frac{1}{4}$ d.

A letra **d** é a inicial de **denario**, mas continuou a significar pence.

Redução de unidades superiores a unidades inferiores

143. Problema. Quantos dias são 3 anos e 6 meses, tendo cada mês 30 dias?

Solução. O ano tem 12 meses, e 3 anos têm 3 vêzes 12 que são 36 meses, juntando mais os 6 do problema fazem 42.

Como o mês tem 30 dias, multiplicaremos 42 por 30, e teremos 1260 dias. Portanto 3 anos e 6 meses são 1260 dias.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3 \\ \hline 36 \\ 6 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42 \text{ meses.} \\ 30 \\ \hline 1260 \text{ dias.} \end{array}$$

Regra. *Para se reduzirem unidades superiores a unidades inferiores, multiplica-se o número de unidades superiores pelo número de unidades imediatamente inferiores que formam aquelas e ao produto juntam-se as unidades inferiores, se as houver; assim se opera sucessivamente, até à denominação requerida.*

1. Reduzir 3 meses e 20 dias a horas. Resp. 2640 horas.
2. Reduzir 2 horas a segundos. " 7200 segundos.
3. Reduzir 15 horas a meses. " 180 meses.
4. Reduzir 7 dias a minutos. " 10080 minutos.
5. Quantas dúzias são 5 grosas e 10 dúzias? " 70 dúzias.

Redução de unidades inferiores a unidades superiores

144. Problema. Quantos anos comerciais são 820 dias ?

Solução. Dividindo 820 dias por 30, que é o número de dias que tem o mês, temos 27 meses e 10 dias de resto. Dividindo depois 27 meses por 12, que é o número de meses que tem o ano, temos 2 anos e 3 meses de resto.

```
820 | 30        27 | 12
60    27        24   2 anos
220              3 meses
210
 10 dias
```

Então, 820 dias são 2 anos, 3 meses e 10 dias.

Regra. *Para se reduzir unidades inferiores a unidades superiores, divide-se o número dado pelo número que a unidade imediatamente superior tem de unidades inferiores. Procede-se do mesmo modo com o quociente obtido até se chegar às unidades requeridas.*

O último quociente junto com os vários restos, se os houver, será a resposta.

Exercício de aplicação. Calcular as seguintes reduções:

1. Reduzir 120 horas a dias. Resp. 5 dias.
2. Reduzir 10800 segundos a horas. " 3 horas.
3. Reduzir 110 meses a anos. " 9 anos e 2 meses.
4. Reduzir 4323 minutos a dias. " 3 dias e 3 minutos.
5. 125 dúzias quantas grosas são? " 10 grosas e 5 dúzias.
6. Reduzir 488 pence a libras. " £ 2 e 8 pence.

Transformação de números complexos em frações ordinárias

145. Problema. 12 minutos a que fração de uma hora equivalem?

Solução. Tendo a hora 60 minutos, 1 minuto é $\frac{1}{60}$ de uma hora, e 12 minutos são $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ de uma hora.

$$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Problema. 10 horas e 40 minutos que fração é de um dia?

Solução, 10 horas e 40 minutos reduzidos a minutos fazem 640 minutos; ora, como o dia tem 1440 minutos, segue-se que 640 minutos são $\frac{640}{1440}$ de um dia. Simplificando-se a fração, fica $\frac{4}{9}$. Portanto 10 horas e 40 minutos são $\frac{4}{9}$ de um dia.

$$\frac{\text{Minutos } 640}{\text{Minutos } 1440} = \frac{4}{9}$$

Regra. *Para se transformar um número complexo em uma fração ordinária, reduz-se êsse número às unidades inferiores requeridas, e estas se escrevem como numerador; o número das mesmas unidades que tiver a unidade superior, escreve-se como denominador, e simplifica-se a fração resultante, se fôr redutivel.*

1. Reduzir 7 horas e 30 minutos a fração de um dia. Resp. $\frac{5}{16}$
2. Reduzir 18 horas a fração de um dia. " $\frac{3}{4}$
3. 11 meses que parte é de um ano? " $\frac{11}{12}$

Reduzir frações ordinárias a números complexos

146. Problema. Quantas horas são $\frac{2}{5}$ de um dia?

Solução. O dia tem 24 horas, então $\frac{2}{5}$ de 24 horas são 9 horas e $\frac{3}{5}$ de uma hora. (Vêde n.º 98). A hora tem 60 minutos, então $\frac{3}{5}$ de 60 minutos são 36 minutos. Logo $\frac{2}{5}$ de um dia são 9 horas e 36 minutos.

$$\frac{2}{5} \text{ de } 24 = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} \text{ de } 60 = \frac{180}{5} = 36$$

Regra. *Para se reduzir uma fração ordinária a um número complexo, acham-se quantas unidades imediatamente inferiores contém a unidade da qual se dá a fração, e multiplica-se êsse número pela fração; divide-se depois o numerador pelo denominador e, se houver resto, acha-se o seu valor do memo modo. Os diversos quocientes formam o complexo.*

Exercício de aplicação. Problemas para resolver:

1. Quantas horas são $\frac{1}{8}$ de um dia? Resp. 3 horas.
2. $\frac{2}{9}$ do dia quantas horas e minutos são? " 5 horas e 20 min.
3. Quantos meses são $\frac{3}{4}$ de um ano? " 9 meses.
4. Quantas horas e minutos são $\frac{9}{16}$ de um dia? " 13 horas e 30 min.

Adição de complexos

147. Problema. Quanto somam os seguintes períodos de tempo; 5 anos, 10 meses e 8 dias + 3 anos, 11 meses e 12 dias + 9 anos, 11 meses e 20 dias.

Solução. Depois de escrevermos as parcelas em colunas, começaremos a soma pelas unidades menores, que são dias; então temos 8 + 12 + 20 = 40.

Como 40 dias são 1 mês e 10 dias, escreveremos os 10 dias debaixo dos dias, e levaremos o mês para a coluna dos meses, que soma 1 + 10 + 11 + 11 = 33. Ora, como o ano tem 12 meses, dividiremos 33 por 12, e teremos 2 anos e 9 meses; escreveremos os 9 meses debaixo da coluna dos meses, e os 2 anos passarão para a coluna dos anos, que soma 19. Portanto as 3 parcelas somam 19 anos, 9 meses e 10 dias.

Anos,	meses,	dias.
5	10	8
3	11	12
9	11	20
19	9	10

Regra. *Para se somarem números complexos, escrevem-se tôdas as parcelas em coluna, de sorte que as unidades da mesma denominação fiquem umas debaixo das outras.*

Somam-se as unidades menores, e divide-se a soma pelo número destas unidades que a unidade imediatamente superior contém; escreve-se o resto debaixo da coluna somada, e o quociente adiciona-se com a coluna seguinte.

Procede-se do mesmo modo com as outras unidades, e debaixo da última coluna, escreve-se a respectiva soma.

Exercício de aplicação. Operar as seguintes adições:

(1.)

Anos,	meses,	dias,	horas.
3	7	20	15
2	8	15	9
5	10	2	3
8	10		5
21	0	8	8

(2.)

Anos,	meses,	dias,	horas.
17	3	21	11
0	11	29	3
7	0	15	9
2	7	4	0

(3.)

20	35	49
0	59	0
15	10	30
7	0	50

(4.)

Libras,	schillings,	pence.
7	11	4
2	10	1
3	10	2
2	14	3

(5.)

£	s.	d.
8	15	$9\frac{1}{4}$
3	5	$10\frac{3}{4}$
5	18	$1\frac{1}{2}$
7	19	$11\frac{1}{4}$
2	3	$2\frac{1}{4}$

(6.)

Grosas,	dúzias,	unidades.
5	8	10
2	11	11
8	9	1
7	3	9
5	10	8

Nota. As frações dos pence no problema 5.º não oferecem dificuldade alguma, notando que $\frac{1}{4}$ = 1 farthing, $\frac{3}{4}$ = 3 farthings, $\frac{1}{2}$ = 2 farthings, etc. Então 8 farthings são $8 \div 4 = 2$ pence que, adicionados com os outros, somam 35.

7. Comprei em um bazar uma capa por £1, 13s. e 4d.; um relógio por £7, 12s. e 9d.; um lampeão por £2, 3s. e 9d., e um binóculo por £9 e 8s.; em quanto importaram êstes objetos?

Resp. £20, 17s. e 10d.

8. Em uma viagem que fiz ao Norte, demorei-me 2 meses e 20 dias na Bahia, 1 mês e 25 dias em Pernambuco, 18 dias no Pará, e 2 meses e 1 dia no Maranhão; que tempo gastei nesta viagem?

Resp. 7 meses e 4 dias.

Subtração de complexos

148. Problema. De 4 anos, 6 meses e 12 dias, subtraindo 2 anos, 7 meses e 20 dias, que tempo resta?

Solução. Começa-se a subtração pelas unidades inferiores, que são os dias.

Anos,	meses,	dias.
4	6	12
2	7	20
1	10	22

Como 20 não podem ser subtraídos de 12, tira-se 1 mês dos 6, e como 1 mês tem 30 dias, somam-se êstes com os 12 e ficam 12 + 30 = 42 dias.

Subtraindo agora 20 de 42 restam 22, que se escrevem debaixo da coluna dos dias.

Como já se tirou 1 mês dos 6, agora só restam 5, e como não se pode subtrair 7 de 5, tira-se 1 ano dos 4, e, como o ano tem 12 meses, juntam-se êstes com os 5, e ficam 17 meses. Agora, subtraindo 7 de 17, restam 10, que se escrevem debaixo dos meses.

Como já se tirou 1 ano, só restam 3; subtraindo 2 de 3 resta 1. Portanto o resto da subtração é 1 ano, 10 meses e 22 dias.

Regra. *Para se subtrair um número complexo de outro, escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo. Começa-se a subtração pelas unidades inferiores e escreve-se o resto debaixo, como em uma subtração decimal.*

Se um dos têrmos do minuendo fôr menor do que o seu respectivo subtraendo, toma-se uma unidade imediata, reduz-se às unidades do têrmo inferior, e com elas se ajuntam para formar um novo minuendo, e opera-se a subtração, e o têrmo

de que se tirou uma unidade, será considerado **como** *tendo 1 de menos.*

Exercício de aplicação. Operar as seguintes subtrações:

(1.)

Anos,	meses	dias.
20	7	15
15	8	7
4	11	8

(2.)

£	s.	d.
25	7	11
15	15	3

(3.)

Horas,	minutos,	segundos
20	35	45
18	0	50

(4.)

°	′	″
29	54	53
18	54	59

(5.)

Grosas,	dúzias,	unidades.
15	3	9
11	2	11

(6.)

Anos,	meses,	dias.
15	0	15
10	10	14

7. Uma criança nasceu a 14 de Abril de 1835 e morreu a 12 de Fevereiro de 1837, que idade tinha?

Resp. 1 ano, 9 meses e 28 dias.

8. A independência dos Estados Unidos realizou-se a 4 de Julho de 1776, e a do Brasil a 7 de Setembro de 1822; que tempo decorreu entre estas duas datas?

Resp. 46 anos, 2 meses e 3 dias.

Multiplicação de complexos

149. Problema. Comprei 5 livros à razão de 2£. 6s. 10d. cada um. Quanto gastei ao todo?

£	s	d
2	6	10
		5
11	14	2

Solução. Antes de multiplicarmos cada têrmo do multiplicando por 5, temos de notar que 12 pence formam 1 shilling e 20 shillings formam 1 £. Então 5 × 10 = 50 pence, reduzidos a shillings, dão 4 shillings e 2 pence. Escreveremos os 2 pence por baixo dos pence e reservaremos os 4 shillings para juntar com os shillings. Passando a multiplicar os shillings, temos 6 × 5 = 30 e 4, que vieram dos pence, são 34 shillings, que reduzidos a libras esterlinas fazem 1 £ e 14 shillings. Escreveremos 14 shillings debaixo dos shillings e reservaremos 1 £ para juntar com as libras. Finalmente, multiplicando as libras temos 2 × 5 = 10 £ e 1 £, que veio dos schillings, são 11 £, que escreveremos debaixo das libras. Portanto, os 5 livros custaram-me 11 £ 14 s. 2 d.

Regra. *Para multiplicar um complexo por um número, escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, e, começando pela direita, multiplica-se cada um dos têrmos do multiplicando pelo multiplicador.*

Divide-se cada produto pelo número que a unidade seguinte tem de unidades imediatamente inferiores, e o quociente junta-se com estas unidades, escrevendo-se o resto debaixo do têrmo que se multiplicam. A última multiplicação será escrita inteira debaixo do têrmo respectivo.

Exercício de aplicação. Operar as seguintes multiplicações:

(1.)

Anos,	meses,	dias.
5	4	8
		6
32	1	18

(2.)

Anos,	meses,	dias.
8	9	5
		7

(3.)

Dias,	horas,	minutos.
2	3	3
		9

(4.)

Libras,	shillings,	pence
8	18	10
		5
44	14	2

(5.)

£	s.	d.
29	19	11
		8

(6.)

°	′	″
8	40	55
		12

7. Qual é o preço de 8 colheres de prata, custando cada uma 2 £ 5d.?
Resp. 16 £ 3s. 4d.

8. Um pedreiro, trabalhando 8 horas por dia, levava 2 horas e 10 minutos para fazer um metro de muro. Quanto tempo precisaria para fazer 15 metros? Resp. 4 dias e 30 minutos.

9. Achar as diversas parcelas, em moeda inglesa, na conta seguinte:

			£ shil. pence
8 metros de veludo lavrado...	*a*	*8 s.— 7 d.*	3 — 8 — 8
10 metros de chamalote de sêda	*a*	*7 s.— 10 d.*	
9 metros de gorgorão bordado.	*a*	*6 s.— 4 d.*	
6 metros de renda inglesa	*a*	*4 s.— 5 d.*	
5 metros de damasco azul ...	*a*	*5 s.— 10 d.*	
10 peças de galão	*a*	*18 s.— ——*	
30 peças de cadarço	*a*	*—— — 11 d.*	
		Soma	

Divisão de complexos

150. Problema. Achar a têrça parte de 8 anos, 5 meses e 9 dias.

Solução. Para acharmos a têrça parte dêste número complexo, teremos de dividi-lo por 3. Dividindo 8 anos por 3, temos o quociente 2 e o resto 2. Êste resto reduzido a meses, dá $2 \times 12 = 24$, meses; juntando a êstes mais 5 meses dados no problema, temos 29 meses que, divididos por 3, dão o quociente 9 e o resto 2. Êste resto, reduzido a dias, dá $2 \times 30 = 60$ dias; juntando mais 9 do problema, temos 69 dias que, divididos por 3, dão o quociente 23 exato. Portanto a têrça parte de 8 anos, 5 meses e 9 dias é 2 anos, 9 meses e 23 dias.

```
8 anos | 3
6        2 anos
—
2

2 × 12 + 5 = 29 meses | 3
             27         9 meses
             —
             2

2 × 30 + 9 = 69 dias | 3
             69        23 dias
             —
             0
```

151. A divisão de complexos tem outras aplicações muito importantes, como a divisão de longitudes, conhecer a diferença de tempo entre dois lugares pela diferença de longitude, etc.; mas êstes pontos, precisando de algum desenvolvimento, não podem ser expostos em um compêndio elementar.

Regra. *Para dividir um complexo por um número divide-se separadamente o número de unidades de cada subdivisão do dividendo a começar pelas unidades superiores; se houver resto, reduz-se o resto às unidades imediatamente inferiores e o número resultante soma-se ao número dessas unidades existente no dividendo. Os quocientes obtidos, dispostos em ordem, formam o quociente pedido.*

Exercício de aplicação:

(1.) Dias, horas, minutos. 9 16 20 | 2

(2.) Anos, meses, dias. 16 9 10 | 5

(3.) Dias, horas, minutos. 35 17 59 | 9

(4.) Grosas, dúzias, unidades. 19 11 9 | 7

(5.) £9 17 s. 8 d. | 4

(6.) 25° 45′ 30″ | 15

7. Dividindo-se igualmente £ 360, 8 s. 4 d. por 173 pessoas, quanto receberá cada uma? Resp. £ 2, 1 s. 8 d.

Nota. Para outras questões de complexos, vêde a nossa **Aritmética Progressiva.**

RAZÃO

152. Tomemos duas réguas e meçamos os respectivos comprimentos tomando como unidade o centímetro. Achamos 50cm para medida da primeira e 10cm para medida da segunda. Pois bem: a fração $\frac{50}{10}$, que tem para numerador 50 e para denominador 10, é a **razão** do comprimento da primeira régua para o comprimento da segunda. Dizemos então que a razão dos dois comprimentos é $\frac{50}{10}$ ou 5.

Também podemos dizer que a razão de duas quantidades é o quociente da divisão do número que mede a primeira pelo número que mede a segunda, supondo que ambas foram medidas com a mesma unidade. Com efeito, se dividirmos 50 por 10 encontraremos 5, que é o valor da fração .

O que fizemos com os dois comprimentos, pode ser feito com duas quantidades da mesma espécie medidas com a mesma unidade: duas quantias expressas em cruzeiros, dois pesos expressos em quilogramas etc.

153. Os dois números que figuram numa razão são os seus *termos*. O primeiro termo (que serve de numerador ou dividendo) chama-se *antecedente*; o segundo termo (que serve de denominador ou divisor) chama-se *conseqüente*.

Uma razão pode também ser indicada colocando-se dois pontos (:) entre os dois termos. Então, a razão de 8 para 4, pode ser escrita

$$8:4 \text{ ou } \frac{8}{4}, \text{ isto é, } 8:4 = \frac{8}{4} = 2.$$

Aplicam-se às razões tôdas as propriedades das frações.

Problema. Qual é a razão de 24 para 8? $24:8 = \frac{24}{8} = 3$

Solução. Dividindo 24 por 8, temos o quociente 3, que é razão de 24 para 8. $24 \div 8 = 3$

Problema. Qual é a razão de 4 para 12? $4:12 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Solução. Dividindo 4 por 12, temos um têrço, que é a razão de 4 para 12. (Vide n.º **71**). $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $4 \div 12 =$

Regra. *Para se achar a razão entre dois números, divide-se o antecedente pelo conseqüente; o quociente será a razão.*

1. Qual é a razão de 88 para 11 ? Resp. 8.
2. Qual é a razão de 33 para 99 ? " $\frac{1}{3}$.
3. Qual é a razão de 48 para 16 ? " 3.
4. Qual é a razão de 16 para 48 ? " $\frac{1}{3}$.
5. Qual é a razão de $\frac{4}{9}$ para $\frac{3}{12}$? " $1\frac{7}{9}$.
6. Qual é a razão de 8 para $4\frac{1}{4}$? 2.

154. Trocando-se a posição dos têrmos de uma razão obtém-se outra razão chamada *inversa* da primeira. Assim, a razão inversa de 3 : 8 ou $\frac{3}{8}$ é 8 : 3 ou $\frac{8}{3}$; a razão inversa de $\frac{1}{2}$ é $\frac{2}{1}$ ou 2, etc.

PROPORÇÕES

155. Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Assim, 12:6=8:4 é uma proporção que se lê: a razão de 12 para 6 é igual à razão de 8 para 4, isto é, o quociente de 12 dividido por 6 é igual ao quociente de 8 dividido por 4.

O sinal de igualdade entre duas razões é quatro pontos (::), como

12 : 6 :: 8 : 4

que se lê: *12 está para 6, assim como 8 está para 4.*

156. A proporção 12:6::8:4 se escreve, hoje, de preferência

$$\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$$

157. Em tôda proporção há duas razões expressas em quatro têrmos. O primeiro e o último chamam-se **extremos**, e os dois têrmos do meio chamam-se meios. Na proporção acima, 12 e 4 são extremos, e 6 e 8 são meios.

Propriedades da proporção

158. Uma proporção tem diversas propriedades, mas as que mais precisamos conhecer são as seguintes:

1.º *Em tôda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.*

Ilustração. Multiplicando os dois meios da proporção que está ao lado, temos 6 × 8 = 48; multiplicando os dois extremos, temos 12 × 4 = 48; os dois produtos são iguais.

$$\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$$

$$6 \times 8 = 12 \times 4$$

Para verificarmos se uma proporção está certa, multiplicaremos os dois meios, e, se o produto fôr igual ao dos dois extremos, a proporção estará exata.

2.º *Se dividirmos ou multiplicarmos os dois têrmos de uma razão, ou os quatro têrmos de uma proporção por um mesmo número, não alteraremos a proporção.*

Ilustração. Dividindo-se por 3 ambos os têrmos da primeira razão na proporção ao lado, ficarão dois números menores, mas a proporção continua; o quociente da primeira razão será igual ao quociente da segunda; e o produto dos meios, igual ao dos extremos. Dividindo-se por 2 todos os têrmos da proporção, ficarão números diferentes, mas a proporção subsiste.

$$\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$$

Esta propriedade nos habilita a reduzirmos os têrmos de uma proporção, quando forem muito altos. Na proporção $\frac{144}{72} = \frac{8}{4}$, podemos dividir por 24 ambos os têrmos da primeira razão, e então teremos $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$. Na proporção $\frac{88}{66} = \frac{132}{99}$, podemos dividir todos os têrmos por 11, e então, teremos $\frac{8}{6} = \frac{12}{9}$.

Esta propriedade é uma aplicação da propriedade das frações já estudadas no n.º **74.**

159. Podemos achar fàcilmente qualquer têrmo de uma proporção, se nos derem os outros três. O têrmo desconhecido é representado na proporção pela letra x.

Problema. Achar o valor de x na proporção $\frac{9}{3} = \frac{18}{x}$

Solução. Como o produto dos dois meios é igual ao produto dos dois extremos, dividindo o produto dos meios por um extremo, teremos o outro extremo. Nesta proporção, o produto dos meios é 3 × 18 = 54; dividindo êste número pelo extremo 9, teremos o quociente 6 que é o valor de x. Escrevendo-se os três têrmos, como se vê na fórmula ao lado, e fazendo-se o cancelamento, obtém-se mais ràpidamente o mesmo resultado. (Veja n.º 59).

$$\frac{9}{3} = \frac{18}{x}$$

$$x = \frac{3 \times \overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} = 6$$

Problema. Achar o valor de x na proporção $\frac{14}{7} = \frac{x}{5}$

Solução. O têrmo requerido é um meio; então multiplicando os dois extremos 14 e 5, e dividindo o produto por 7, teremos $\frac{14 \times 5}{7}$; cancelando agora os números 7 e 14, teremos como resultado 2×5=10 que é o valor de x.

$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 10$$

Regra. *Para se achar um dos extremos, multiplicam-se os meios e divide-se o produto pelo outro extremo.*

E para se achar um dos meios, multiplicam-se os extremos e divide-se o produto pelo outro meio.

Exercício de aplicação. Achar o valor de x nas seguintes proporções:

		Respostas
1.	$12:48::16:x$	$x=64$
2.	$18:24::x:40$	$x=30$
3.	$25:x::35:42$	$x=30$
4.	$\frac{x}{72}=\frac{36}{40}$	$x=64\frac{4}{5}$
5	$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{4}}{x}$	$x=\frac{1}{3}$
6.	$\frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{4}}=\frac{3\frac{1}{3}}{x}$	$x=5\frac{2}{3}$
7.	$\frac{7}{x}=\frac{3}{21}$	$x=49$
8.	$\frac{4\times 2}{18}=\frac{24}{x}$	$x=54$
9.	$\frac{7}{\frac{1}{2}}=\frac{x}{4}$	$x=56$
10.	$\frac{\frac{1}{2}}{x}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$	$x=\frac{1}{3}$
11.	$\frac{20\times 6}{160}=\frac{252}{x}$	$x=336$
12.	$\frac{12\times 30}{24}=\frac{240}{x}$	$x=?$
13	$\frac{0,120}{0,60}=\frac{0,50}{x}$	$x=?$
14.	$\frac{x}{6\frac{1}{2}}=\frac{1\frac{1}{2}}{1,9}$	$x=?$
15.	$\frac{200}{600}=\frac{800}{x}$	$x=?$
16.	$\frac{144}{x}=\frac{432}{36}$	$x=?$

Grandezas proporcionais

160. Diz-se que duas grandezas são *proporcionais* quando elas se correspondem de modo tal que multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número.

No primeiro caso a proporcionalidade se chama *direta* e no segundo, *inversa*; as grandezas se dizem *diretamente proporcionais* ou *inversamente proporcionais*. Também se diz que uma das grandezas é *diretamente* (ou *inversamente*) *proporcional* à outra.

Exemplos: I) os preços de uma mercadoria vendida a peso são diretamente proporcionais aos pesos. Assim, se 1kg de café custa Cr$ 9,00, 2kg custam 2 vêzes mais ou Cr$ 18,00; 3kg custam 3 vêzes mais ou Cr$ 27,00 e assim por diante.

II) as quantidades de mercadoria que se podem adquirir com uma importância fixa são inversamente proporcionais aos preços da mercadoria.

Suponhamos que temos livros que custam Cr$ 5,00, Cr$ 10,00 e Cr$ 15,00. Com a quantia de Cr$ 60,00 podemos comprar

12 livros de Cr$ 5,00
6 livros de Cr$ 10,00
4 livros de Cr$ 15,00

isto é, quando o livro dobrou de preço a quantidade de livros ficou dividia por 2; quando o preço triplicou (de Cr$ 5,00 para

Cr$ 15,00) a quantidade de livros ficou dividida por 3 (de 12 passou a 4).

161. A denominação dada a essas grandezas proveio do fato de podermos escrever:

No exemplo I a proporção $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$

No exemplo II a proporção $\frac{12}{6} = \frac{10,00}{5,00}$

Note-se que no 1.º caso a razão de duas quantidades de uma grandeza (pêso) é igual à razão das quantidades correspondentes da outra grandeza (preço); ao passo que no 2.º caso, a razão de duas quantidades de uma grandeza é igual à razão inversa das quantidades correspondentes da outra grandeza.

Regra de três

162. Problema I. Quanto custam 6kg de café, sabendo-se que 4kg custam Cr$ 36,00 ?

Suponhamos que já resolvemos o problema e chamemos x ao resultado, isto é, ao preço de 6kg de café. Como os preços são proporcionais aos pesos (número de quilogramas), podemos escrever

$$\frac{4}{6} = \frac{36,00}{x}$$

isto é, a razão de dois pesos de café é igual à razão dos preços correspondentes.

Basta, agora, calcular o valor de x na proporção acima:

$$x = \frac{6 \times 36,00}{4} = 54,00$$

163. O problema que acabamos de resolver é um problema de **Regra de três.** Quando as grandezas que nele entram são diretamente proporcionais como neste caso a regra de três é chamada *direta*

164. Problema II. Com o dinheiro que possuía comprei 18 metros de um tecido de Cr$ 5,00 o metro. Quantos metros de outro tecido de Cr$ 15,00 poderia ter comprado com o mesmo dinheiro ?

Sabemos que o número de metros que podemos comprar com certa quantia é inversamente proporcional ao preço de cada metro, porque quando o preço do metro dobra o número de metros fica dividido por 2, quando o preço triplicá o número de metros fica dividido por 3, etc.

Mas, então, (veja n.º **161**) a razão entre os pesos é igual à razão inversa dos preços correspondentes e podemos escrever

$$\frac{5}{15} = \frac{x}{18}$$

donde tiramos

$$x = \frac{5 \times 18}{15} = 6$$

5,00	18 m
15,00	x

$$\frac{5}{15} = \frac{x}{18}$$

$$x = 6$$

Neste problema temos um exemplo de *regra de três inversa.*

164. Observação. Na prática é fácil distinguir-se quando a regra de três é direta ou inversa. Na regra direta as quantidades de uma grandeza crescem ou decrescem, conforme crescem ou decrescem as quantidades da outra; na regra inversa as quantidades da grandeza procurada crescem ou decrescem conforme decrescem ou crescem as da grandeza dada.

166. Método de redução à unidade. Os problemas de regra de três podem ser resolvidos pelo método de redução à unidade, que vamos aplicar ao problema I do n.º 162: Quanto custam 6kg de café, sabendo que 4kg custam Cr$ 36,00 ?

Basta raciocinar: Se 4kg custam Cr$ 36,00 cada quilograma deve custar 4 vèzes menos ou $\frac{36,00}{4}$; custando 1 quilograma $\frac{36,00}{4}$ 6 kg custam 6 vêzes mais ou $\frac{36,00 \times 6}{4}$ que são Cr$ 54,00.

4kg	36,00
1kg	$\frac{36,00}{4}$
6kg	$\frac{36,00 \times 6}{4}$

Apliquemos o mesmo método da redução à unidade ao problema II do n.º 162: Com o dinheiro que possuia comprei 18 metros de tecido de Cr$ 5,00 o metro. Quantos metros de outro tecido de Cr$ 15,00 poderia ter comprado com o dinheiro que possuia ?

Se cada metro comprado custou Cr$ 5,00, a quantia total possuída era 18 vêzes maior ou 5,00 × 18. Se cada metro custa agora Cr$ 15,00, o número de metros que se podem comprar dêsse outro tecido é o quociente de 5,00 × 18 por 15,00 ou

$5{,}00 \times 18$

$\dfrac{5{,}00 \times 18}{15{,}00}$

$$\frac{5{,}00 \times 18}{15{,}00} = 6 \text{ m.}$$

Exercício de Aplicação — Resolver os seguintes problemas:

1. Se 7 kg de cânfora custam Cr$ 28,00, quanto devem custar 15 kg ? Resp. Cr$ 60,00.

2. Se 5 kg de goma arábica custam Cr$ 36,00, quanto devem custar 12 kg ? Resp. Cr$ 86,40.

3. Se 33 homens fazem 165 metros de muro, que extensão farão 198 homens no mesmo tempo? Resp. 990 metros.

4. Sabe-se que 15 homens fariam certa obra em 18 dias, em quantos dias 10 homens a fariam ? Resp. 27.

5. Um engenheiro calculou que seriam necessários 75 homens para fazer um atêrro em 220 dias; mas, sendo preciso que o atêrro ficasse pronto em 15 dias, quantos trabalhadores deveria empregar para concluir neste tempo? Resp. 1100 homens.

6. Se $\frac{2}{3}$ de uma obra foram avaliados em Cr$ 1 100,00, qual é o valor de $\frac{3}{11}$ da mesma obra ? Resp. Cr$ 450,00.

7. Vendendo-se $\frac{3}{7}$ de uma pipa de vinho por Cr$ 660,00, por quanto se deve vender o resto da pipa? Resp. Cr$ 880,00.

8. Custando 65 kg de açúcar Cr$ 91,00, quanto devem custar 13 kg. ? Resp. Cr$ 18,20.

9. Se 12 metros de pano custam Cr$ 75,00, quanto devem custar 8 metros ? Resp. Cr$ 50,00.

10. Quantos homens poderão fazer uma obra em 168 dias, sabendo-se que 108 homens a podem fazer em 266? Resp. 171.

Regra de três composta

167. Nos casos examinados, a grandeza procurada dependia apenas de uma outra espécie de grandeza. É muito freqüente, porém, a grandeza procurada depender de várias, podendo, neste caso, ser diretamente proporcional a umas e inversamente proporcional a outras. O problema se diz então de *regra de três composta* e se resolve fazendo variar uma a

uma as diversas grandezas de que depende a grandeza procuradada

Problema. Se 8 homens serram 20 tábuas em 5 dias, quantas tábuas serrarão 12 homens em 3 dias?

8 homens	5 dias	20 tábuas
12 "	3 "	x

Neste problema o número de tábuas serradas depende do número de homens e do número de dias. Vamos decompô-lo em duas regras de três simples; para isto faremos primeiramente variar o número de homens supondo que o número de dias continua o mesmo; depois faremos variar o número de dias.

Apliquemos o método de redução à unidade. Se 8 homens em 5 dias serram 20 tábuas, 1 homem nos mesmos 5 dias serrará 8 vêzes menos ou $\frac{20}{8}$ e 12 homens serrarão 12 vêzes mais do que 1 homem ou $\frac{20\times12}{8}$ tábuas. Se 12 homens em 5 dias serram $\frac{20\times12}{8}$ tábuas, em 1 dia serrarão 5 vêzes menos ou $\frac{20\times12}{8\times5}$ e em 3 dias serrarão 3 vêzes mais do que em um só dia, isto é,

8 homens	5 dias	20 tábuas
1 "	5 "	$\frac{20}{8}$
12 "	5 "	$\frac{20\times12}{8}$
12 "	1 "	$\frac{20\times12}{8\times5}$
12 "	3 "	$\frac{20\times12\times3}{8\times5}$

$$x = \frac{20\times12\times3}{8\times5} = 18 \text{ tábuas}$$

FALSA POSIÇÃO

168. A regra da falsa posição é um processo aritmético, no qual se opera com um número suposto ou falso, para se achar o verdadeiro.

A falsa posição é uma aplicação curiosa da regra de três.

Problema. Perguntando-se a uma professôra qual era o número de suas alunas, ela respondeu: Se eu tivesse outras tantas como as que tenho, e mais metade e a quarta parte, teria 88. Qual era o número das alunas ?

Solução.		
Número falso	12	$33 : 88 :: 12 : x$
Outros tantos	12	
Mais metade	6	$x = 32$ alunas.
A quarta parte	3	
Total falso	33	

Solução. Para resolvermos êste problema pela falsa posição tomaremos qualquer número para com êle fazermos o cálculo, e o chamaremos número falso. Seja, por exemplo, o número 12, e juntando a êle outros tantos, mais metade e mais a quarta parte, teremos o total 33, que chamaremos total falso.

Agora, com os dois números falsos 12 e 33, e com o número 88 do problema, temos os três têrmos de uma proporção, e podemos fàcilmente achar o quarto têrmo, que é o número requerido. A proporção será então: 33, total falso, está para 88, total verdadeiro, assim como 12 número falso, está para x, número verdadeiro e requerido. Achando-se o valor de x, temos 32, que é o número de alunas que tinha a professora.

Verificação. $32 + 32 + 16 + 8 = 88$.

Regra. *Na falsa posição, toma-se um número falso, e efetuam-se com êle tôdas as operações indicadas no problema; depois o total falso está para o total verdadeiro, assim como o número falso que se tomou está para o número requerido.*

1. Disse uma menina à sua mãe: Se a minha galinha tivesse pôsto mais metade e um têrço dos ovos que já pôs, eu poderia agora juntar 33 ovos. Quantos ovos tinha pôsto a galinha ? Resp. ?

2. Uma pessoa comprou certo número de laranjas, e se a têrça, a quarta e sexta parte delas fôssem reunidas, o seu número seria 54. Quantas laranjas comprou ? Resp. 72.

3. Qual é o número, cuja metade somada com a têrça e quarta parte, dá 52 ? Resp. 48.

4. Se um quarto, um quinto e um décimo de certo número fôssem reunidos, a soma seria 55. Qual é o número ? Resp. ?

5. Em um arrozal voavam muitas pombas; não eram 100, mas se a elas se juntassem outras tantas, mais metade e a quarta parte de seu número e mais uma, seriam 100. Qual era o número das pombas ? Resp. ?

Nota. Na falsa posição, quando, além das partes alíquotas, se juntam também quantidades conhecidas como 1, 2, 3, etc., estas se têm de subtrair do total dado. No problema acima, junta-se 1 pomba para ficar o número 100 completo, mas nós teremos de operar só com o total 99, que é a soma das partes alíquotas.

PORCENTAGEM

169. A expressão *por cento* corresponde a *centésimos*. Assim, *3 por cento* de uma quantidade é o mesmo que *3 centésimos* dessa quantidade Por exemplo: 3 por cento de Cr$ 500,00 é o mesmo que $\frac{3}{100}$ de 500,00.

A expressão *por cento* se abrevia %, de sorte que 3 %, 8 %, 12 %, etc. significam *3 por cento, 8 porcento, 12 por cento*, etc.

Pelo que ficou dito acima 5 % de 200 laranjas são 10 laranjas. Com efeito:

$$5\ \%\ \text{de}\ 200 = \frac{5}{100}\ \text{de}\ 200 = 200 \times \frac{5}{100} = \frac{200 \times 5}{100} = 10$$

Neste exemplo chama-se *principal* às 200 laranjas; 5 é a *taxa* e 10 laranjas, a *porcentagem*.

Em todo problema de porcentagem consideramos êsses três elementos.

Achar a porcentagem

170. Pelo exemplo dado no número 169, já se viu que se obtém a porcentagem multiplicando o principal pela taxa e dividindo o produto por 100.

Problema. Calcular 3 % de 720.

Vem

$$3\ \%\ \text{de}\ 720 = \frac{3}{100}\ \text{de}\ 720 = 720 \times \frac{3}{100} = \frac{720 \times 3}{100} = 21,6$$

Na prática basta multiplicar o principal pela taxa e no produto separar duas casas decimais (veja n.º 46), dando a disposição que se vê ao lado.

$$\begin{array}{r} 720 \\ 3\ \% \\ \hline 21,60 \end{array}$$

Regra. *Para se achar a porcentagem, multiplica-se o principal pela taxa, e divide-se o produto por 100.*

Exercício de aplicação. Achar as seguintes porcentagens:

	Respostas
1. 6% de 250.	15
2. 8% de 175.	14
3. 8% de 11.	0,88
4. 2% de 60.	1,2
5. 15% de Cr$ 360,00.	Cr. 54,00
6. 9% de 300.	?
7. 10% de 1800.	?
8. 6% de Cr$ 400,00	?
9. 12% de Cr$ 1800,00	?
10. 18% de Cr$ 500,00	?

171. A regra é a mesma quando a taxa é uma fração (ordinária ou decimal) ou um número misto, como $\frac{1}{2}$ %, $\frac{3}{4}$ %, 0,72 %, $1\frac{1}{4}$ %, $2\frac{1}{2}$ %, $5\frac{1}{8}$ %, 3,45 %, 7,22 % etc. Basta operar com êsses números, aplicando as regras ja estudadas.

Problema. Quanto é $2\frac{3}{4}$ % de 120 ?

Multiplicando 120 por $2\frac{3}{4}$ vem:

$$120 \times 2\tfrac{3}{4} = 120 \times \frac{11}{4} = \frac{120 \times 11}{4} = \frac{1320}{4} = 330$$

```
 120
  11
1320 | 4
12    330
 00
330÷100=3,30
```

Dividindo 330 por 100, encontra-se 3,30, que é a solução.

Exercícios de aplicação. Calcular as porcentagens:

1. $1\frac{3}{4}$ % de 160 **2.** $7\frac{1}{2}$ % de 180 **3.** 4,6 % de 250

4. $3\frac{1}{5}$ % de 480 **5.** $5\frac{1}{8}$ % de 560 **6.** 6,25 % de 880

Achar a taxa

172. Problema. O número 6 quantos por cento é de 120 ?

Solução. 6 é a porcentagem, e 120 é o principal; multiplicando a porcentagem por 100 e dividindo o produto por 120, teremos a taxa, que é 5 %.

$$\frac{6 \times 100}{120} = 5\ \%$$

Regra. *Para se achar a taxa, multiplica-se a porcentagem por 100, e divide-se o produto pelo principal.*

Achar as seguintes taxas:

1. Quantos por cento de 88 são 44 ? Resp. 50%
2. Quantos por cento de 15 são 3 ? " 20 %
3. Quantos por cento de Cr$ 5,00 são Cr$ 2,00? " 40%
4. Quantos por cento de Cr$ 950,00 são Cr$ 152,00? " 16%
5. Quantos por cento de 100 são 99? " ? %

Achar o principal

173. Problema. 6 de que número é 5%?

Solução. 6 é a porcentagem e 5 é a taxa; multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o produto pela taxa, que é 5, teremos o principal 120.

$$\frac{6 \times 100}{5} = 120$$

Regra. *Para se achar o principal, multiplica-se a porcentagem por 100, e divide-se o produto pela taxa.*

Resolver os seguintes problemas:

1. De que número, 28 são 7%? Resp. 400.
2. De que número, 45 são 25%? " 180.
3. De que quantia, Cr$ 67,50 são 15%? Respo. 450,00.
4. De que número, 4 é $\frac{1}{2}$ % Resp. 800.
5. De que quantia, Cr$ 150,00 são $\frac{3}{5}$ %? Resp. 25.000,00.
6. Um homem deu a um sobrinho Cr$ 30,00, quantia que era 6% da que deixou a uma sobrinha; quanto deixou a esta?

JUROS

174. A pessoa que toma emprestada certa quantia paga por ela, geralmente, um aluguel, tal como quem fica com a casa de outrem para nela morar. O aluguel do dinheiro chama-se **juro** e costuma ser pago em forma de porcentagem.

Os cálculos de juros são, por isso, da mesma natureza que os de porcentagem; mas, entra neles uma nova quantidade que é o tempo.

A quantia que se dá ou toma emprestada é o **capital.**

O número que indica a quantos por cento, em cada ano ou em cada mês, se empresta o dinheiro é a **taxa.**

A quantia que o aluguel rende enquanto está emprestado é o **juro.**

O prazo durante o qual se empresta o dinheiro é o **tempo.**

Nota. É necessário observar que nos cálculos de juros, o ano é considerado como tendo 360 dias, e o mês 30 dias, e nesta suposição se devem fazer as operações. (Vêde n.º 140).

Achar os juros

175. Problema. Quais são os juros de Cr$ 360,00 a 5 % ao ano, durante 3 anos?

```
  360
    5 %
 -----
 18,00
    3 anos
 -----
 54,00
```

Solução. 5 % de Cr$ 360,00 são Cr$ 18,00 conforme já aprendemos na porcentagem (**170**). Como os Cr$ 18,00 são os juros de 1 ano, multiplicando agora êstes juros por 3, teremos os juros de 3 anos, que são Cr$ 54,00.

Regra. *Para se acharem os juros, multiplica-se o capital pela taxa; divide-se o produto por 100, e o resultado multiplica-se pelo tempo.*

Nota. Se o tempo, além de anos completos, tiver ainda fração de um ano, como meses e dias, dividiremos o juro de 1 ano por 12, e teremos o juro de 1 mês. Dividiremos depois o juro de 1 mês por 30. e teremos

o juro de 1 dia. Multiplicando agora o número de meses ou de dias pelo seu respectivo juro, teremos o valôr dessa fração de um ano, que se soma com a dos anos completos.

Também se pode reduzir a meses e dias a fração do ano (vêde n.º **145**) e seguir a regra geral.

1. Achar os juros de Cr$ 317,50, em 1 ano e 4 meses a 6 % ao ano.
Resp. Cr$ 25,40.

2. Quais são os juros de Cr$ 1.970,00, em 5 anos a 9 % ao ano ?
Resp. Cr$ 886,50.

3. Quais são os juros de Cr$ 900,00, em 1 ano, 7 meses e 18 dias, a 7 % ao ano ?
Resp. Cr$ 102,00.

4. Achar os juros de Cr$ 700,00, em 4 anos, a 6 % ao ano.
Resp. Cr$ 168,00.

5. Quais são os juros de Cr$ 480,00, em 8 anos, 6 meses e 9 dias, a 10 % ao ano ?
Resp. Cr$ 409,20.

6. Achar os juros de Cr$ 1.500,00, em 2 anos e 1 mês, a 6 % ao ano.
Resp. Cr$ 187,50.

Nota. Como ao tratar de porcentagem já demos o método de achar a taxa e o capital, aqui bastará só darmos as fórmulas.

$$\textbf{Juros} = \frac{\text{capital} \times \text{taxa} \times \text{tempo}}{100}$$

$$\textbf{Taxa} = \frac{\text{juros} \times 100}{\text{capital} \times \text{tempo}}$$

$$\textbf{Tempo} = \frac{\text{juros} \times 100}{\text{capital} \times \text{taxa}}$$

$$\textbf{Capital} = \frac{\text{juros} \times 100}{\text{taxa} \times \text{tempo}}$$

ABATIMENTO E DESCONTO

176. A diferença no preço da mercadoria, que, por qualquer motivo, o vendedor faz em favor do comprador, chama-se *abatimento*. Assim, os que compram em grandes quantidades, isto é, por atacado, gozam de abatimento e êste se faz geralmente em forma de porcentagem.

As quantias devidas e que são pagas antes da data marcada também sofrem abatimento, que, neste caso, se chama *desconto*.

Problema. Descontando-se 8 % em Cr$ 450,00, que quantia ficará ?

Solução. 8 % de Cr$ 450,00 são Cr$ 36,00, que é a porcentagem que se tem de descontar. Ora, de Cr$ 450,00 subtraindo-se Cr$ 36,00, restam Cr$ 414,00.

```
450,00          Cr$ 450,00
   8 %          Cr$  36,00
------          ----------
 36,00          Cr$ 414,00
```

Regra. *Para descontar uma dívida acha-se a porcentagem da quantia mencionada, e desta subtrai-se a porcentagem achada.*

1. Quanto se tem de receber de uma letra de Cr$ 850,00 que vai sofrer o desconto de 6 % ? Resp. Cr$ 799,00.

2. Comprei Cr$ 750,00 de gêneros, e, fazendo logo o pagamento, abateram-me 12 %, quanto paguei ? Resp. Cr$ 600,00.

3. Comprei 2 caixões contendo 450 dúzias de ovos, mas estando alguns quebrados, fizeram-me um abatimento de 14 %, quantas dúzias paguei ? Resp. 387.

4. De Cr$ 800,00 menos 8 %, subtraindo Cr$ 600,00 menos 7 %, quanto resta ? Resp. Cr$ 178,00.

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

177. Já tratamos, no n.º 37, da divisão em partes iguais, aqui trataremos sòmente da divisão em partes proporcionais.

Problema. Dividir Cr$ 140,00 em três partes proporcionais a 3, 5 e 6.

Solução. Somando 3, 5 e 6 achamos 14. Então uma das partes é $\frac{3}{14}$ de Cr$ 140,00, a outra é $\frac{5}{14}$ e a outra é $\frac{6}{14}$. Ora, $\frac{3}{14}$ de Cr$ 140,00 são Cr$ 30,00, $\frac{5}{14}$ são Cr$ 50,00 e $\frac{6}{14}$ são Cr$ 60,00. (Vêde n.º 84).

Processo

$\frac{3}{14}$ de 140,00 = 30,00
$\frac{5}{14}$ de 140,00 = 50,00
$\frac{6}{14}$ de 140,00 = 60,00

Regra. *Para se dividir uma quantidade em partes proporcionais a diversos números, formam-se tantas frações quantos forem êstes números, tendo cada fração como denominador a soma dos números e um dêstes como numerador. Calculam-se, depois, as frações da quantidade a dividir.*

1. Dividir o número 78 em partes proporcionais a 3, 4 e 6. Resp. 18, 24 e 36.

2. Dividir o número 200 em partes proporcionais a 4, 5, 6 e 10. Resp. 32, 40, 48 e 80.

3. Dividir o número 130 em partes proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

Solução. As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, reduzidas ao mínimo denominador comum, são $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$; então, o número 130 pode ser dividido na razão dos numeradores 6, 4 e 3.

4. João e Pedro fizeram certo negócio e ganharam Cr$ 210,00; ora, tendo João entrado com Cr$ 60,00 e Pedro com Cr$ 80,00, quanto deve receber de lucro cada um ?

Solução. Sendo 60,00 e 80,00 divisíveis por 20,00 podem ser reduzidos a 3 e 4, e o lucro dividido em partes proporcionais 3 e 4. Então $\frac{3}{7}$ de Cr$ 210,000 = Cr$ 90,00 e $\frac{4}{7}$ de Cr$ 210,00 = Cr$ 120,00.

MÉDIA ARITMÉTICA

178. Há diversas espécies de média, mas, só trataremos aqui da **média aritmética.**

Problema. Qual é a média aritmética de 4, 9, 12 e 15 ?

Solução. A soma dos números é 40, e êles são 4; dividindo agora aquela soma, por 4 teremos $40 \div 4 = 10$. Portanto 10 é a média aritmética de 4, 9, 12 e 15.

$$\frac{4+9+12+15}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Regra. *Para se achar a média aritmética de duas ou mais quantidades, divide-se a soma dessas quantidades pelo número delas; o quociente será a média aritmética.*

1. Qual é a média aritmética de 4, 6, 10 e 12 ? Resp. 8.
2. Qual é a média aritmética de 45, 50, 54, 60, 62 e 65? " 56.
3. Qual é a média aritmética de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$? " $\frac{5}{16}$
4. Durante o mês passado, o preço do café variou do seguinte modo: Cr$ 7,80, Cr$ 8,60, Cr$ 9,40, e Cr$ 9,20; qual foi o preço médio do café ? Resp. Cr$ 8,75.

MISTURA E LIGA

179. É comum, no comércio, misturarem-se mercadorias da mesma espécie mas de preços diferentes para vender a *mistura* a um preço único chamado *preço médio*.

198. **Liga** é o resultado da combinação de diversos metais por meio da fusão.

Os problemas de mistura e de liga resolvem-se do mesmo modo.

Problema. Comprei 5 kg de chá a Cr$ 4,50 cada kg, comprei mais 4 kg a Cr$ 6,00, e comprei ainda 6 kg a Cr$ 5,00; misturando todo êste chá, a como ficou cada kg da mistura?

Solução. O número de kg do chá misturado é 15 e o importe dos 15 kg é Cr$ 76,50; dividindo esta quantia por 15, teremos Cr$ 5,30, preço de cada kg da mistura.

$$76{,}50 \div 15 = 5{,}30$$

5 × 4,50	22,50
4 × 6,00	24,00
6 ÷ 5,00	30,00
— 15 kg custaram	76,50

Regra. *Para se achar o preço médio da mistura, divide-se o importe total da mistura pelo número de unidades misturadas.*

1. Um negociante misturou 50 garrafas de vinho de custo de Cr$ 4,00 a garrafa, com 30 garrafas de custo de Cr$ 5,20; a como lhe ficou cada garrafa desta mistura? Resp. Cr$ 4,50.

2. Um negociante comprou 20 litros de aguardente por Cr$ 25,00 e, por ser muito forte, misturou-lhe 5 litros de água; a que preço ficou cada litro da mistura? Resp. Cr$ 1,00.

3. O latão obtém-se ligando 3 kg. de zinco e 7 kg. de cobre. Custando o cobre Cr$ 3,00 cada kg., e o zinco Cr$ 2,00, qual será o preço de cada kg. do latão? Resp. Cr$ 2,70.

4. Em uma distilação, o primeiro barril de aguardente que saiu do alambique, tinha 30 graus; o segundo tinha 26; o terceiro, 22, e o quarto, 18. Sendo tôda esta aguardente reunida em uma pipa, com quantos graus, ficou ela? Resp. 24.

CÂMBIO

180. Câmbio, em seu sentido lato, quer dizer o modo de fazer pagamentos em lugares distantes, por meio de letras ou ordens.

Câmbio, em seu sentido restrito, significa a troca de dinheiro de uma nação por dinheiro de outra nação.

Câmbio sôbre a França.



181. A unidade monetária na França é o **franco** que se divide em 100 *centimes* ou centésimos.

Assim como varia o preço das mercadorias, assim varia também o preço das moedas estrangeiras.

O número de centavos que custa um franco indica a taxa do câmbio; assim, se o câmbio sôbre a França estiver a 0,60, isto quer dizer que, por cada franco que quisermos obter em moeda ou letras, teremos de pagar 60 centavos da nossa moeda.

Problema. Quanto devem custar 125 francos, ao câmbio de 0,60?

Solução Custando um franco Cr$ 0,60, 125 francos devem custar 0,60 × 125 = 75,00.

$$0{,}60 \times 125 = 75{,}00$$

Problema. Reduzir Cr$ 75,00 a francos ao câmbio de 0,60.

Solução. Custando um franco Cr$ 0,60, dividem-se 75,00 por 0,60, e obtém-se o número de francos, que é 125.

$$75{,}00 \div 0.60 = 125$$

Regra. *Para se reduzir francos a moeda brasileira, multiplica-se o valor de um franco pelo número de francos.*

E para se reduzir moeda brasileira a francos, divide-se a importância em moeda brasileira pelo valor de um franco.

1. Em quanto importam 150 francos, ao câmbio de 0,40? Resp. Cr$ 60,00.

2. Reduzir 400 francos a moeda brasileira, ao câmbio de 0,70. Resp. Cr$ 280,00.

3. Reduzir Cr$ 1.000,00 a francos, ao câmbio de 0,50. Resp. 2000 francos.

4. Reduzir Cr$ 1.800,00 a francos, ao câmbio de 0,36. Resp. 5000 francos.

5. Quanto valem 185 francos, ao câmbio de 0,80? Resp. ?

6. Reduzir Cr$ 328,00 a francos, ao câmbio de 0,82. Resp ?

Câmbio sôbre a Inglaterra

182. Já vimos no n.º **142** que a unidade monetária inglesa é a **libra esterlina** e já estudamos a sua divisão.

O número de pence que vale um cruzeiro brasileiro, indica a altura ou a taxa do câmbio sôbre a Inglaterra. Se o câmbio estiver a 25, isto quer dizer que o nosso cruzeiro vale 25 pence; se estiver a $24\frac{1}{2}$, quer dizer que o nosso cruzeiro vale 24 pence e meio, etc.

183. Problema. Reduzir Cr$ 840,00 a moeda inglesa, ao câmbio de 5 d.

Solução. Se um cruzeiro vale 5 pence, 840 cruzeiros valem $840 \times 5 = 4200$ pence. Ora, reduzindo êstes pence a shillings, temos $4200 \div 12 = 350$ shillings, e reduzindo êstes shillings a libras, temos $350 \div 20 = 17$ libras e 10 shillings que é a quantia em moeda inglêsa correspondente aos 840 cruzeiros.

Em lugar de Cr$ 840,00 escreveremos 840 cruzeiros para mais fácil compreensão do cálculo.

```
840 cruzeiros
  5          4200 ÷ 12 = 350
----
4200         350 | 20
             150   17 libras
              10 shillings
```

Regra. *Para se reduzir moeda brasileira a moeda inglesa, multiplica-se o número de cruzeiros pela taxa do câmbio, e reduz-se o produto, que é o número de pence, a shillings e libras.*

Reduzir as seguintes quantias a moeda inglêsa:

1. Cr$ 2.000,00, ao câmbio de 6. Resp. £ 50
2. Cr$ 6.000,00, ao câmbio de 5. " £ 125
3. Cr$ 2.600,00, ao câmbio de 6. " £ 65
4. Cr$ 4.000,00, ao câmbio de 3. " £ 50
5. Cr$ 1.800,00, ao câmbio de 4. " £ 30

184. Passemos agora a reduzir moeda inglêsa, isto é, libras, shillings e pence a moeda brasileira.

Problema. Quanto valem no Brasil £ 20, 11 shillings e 9 pence, ao câmbio de 27 ?

Solução. 20 libras, 11 shillings e 9 pence, reduzidos a pence, são 4941 pence. Valendo cada cruzeiro 27 pence, divide-se 4941 por 27 e obtém-se o número de cruzeiros, que é 183, isto é, Cr$ 183,00.

$20 \times 20 + 11 = 411$
$411 \times 12 + 9 = 4941$
$4941 \div 27 = 183$ cruzeiros

Regra. *Para se reduzir moeda inglesa a moeda brasileira, reduz-se a moeda inglesa a pence, e o número dêstes dividido pela taxa do câmbio, dará o número de cruzeiros requerido.*

1. Reduzir £ 112 e 10 shillings a moeda brasileira, com o câmbio a 6. Resp. Cr$ 4.500,00.

2. Reduzir £ 56 e 8 shillings a moeda brasileira, ao câmbio de 8. Resp. Cr$ 1.692,00.

3. Reduzir £ 4, 15 shillings e 10 pence a moeda brasileira, ao câmbio de 5. Resp. Cr$ 230,00.

185. Para acharmos o valor da libra, dada a taxa do câmbio, dividiremos 240 pela taxa e o quociente será o valor da libra, em nossa moeda, como vemos nos seguintes exemplos:

(1.º) $\frac{240}{25} = 48{,}00$ (2.º) $\frac{240}{6} = 40{,}00$ (3.º) $\frac{240}{12} = 20{,}00$

No primeiro exemplo, sendo a taxa de câmbio 5, o valor da libra é 48,00; no segundo, sendo 6, o valor da libra é, 40,00; no terceiro, sendo 12, o seu valor é 20,00.

Do mesmo modo podemos achar o valor da libra em outra taxa qualquer.

Câmbio sôbre Portugal

189. Antigamente o dinheiro brasileiro e o português tinham a mesma denominação e as mesmas unidades (real, mil-réis e conto de réis); mas como as moedas portuguesas de ouro, prata e cobre tinham o dôbro do tamanho das moedas brasileiras, tinham também o dôbro do valor. Assim, uma moeda portuguesa de ouro de 10$000 era igual às nossas moedas de 20$000, e por isso 100$000 em moeda portuguesa correspondiam exatamente a 200$000 em moeda brasileira. Para se exprimir esta diferença, dava-se ao dinheiro português o nome de *moeda forte.*

Atualmente a unidade de moeda brasileira é o *cruzeiro* e a de moeda portuguesa é o *escudo*, ambos divididos em 100 centavos. A taxa do câmbio sôbre Portugal é dada pelo número, ou fração de cruzeiros, que se precisa dar por um escudo. Por exemplo: si por um escudo se deve dar Cr$ 0,90 diz-se que 0,90 é a taxa do câmbio sôbre Portugal.

No câmbio com a Inglaterra, o Brasil dá sempre o certo, que é o cruzeiro e a Inglaterra dá o incerto, que é 6, 10, 27, etc pence pelo cruzeiro; e quanto mais alto estiver o câmbio, tanto mais bem pago será o nosso cruzeiro em moeda inglêsa. No câmbio com a França e Portugal dá-se ao contrário. A França dá sempre o certo, que é o franco, e o Brasil dá o incerto que é um número variável de centavos pelo franco; e quanto mais alto estiver o câmbio, tanto mais caro nos custará o franco. O mesmo acontece com Portugal que nos dá sempre um escudo por uma quantidade variável de centavos.

Problema. A quanto correspondem em nossa moeda 1.280 escudos, ao câmbio de 0,70 ?

Solução. Multiplicando o número de escudos que é 1.280, pela taxa, temos Cr$ 896,00, quantia esta correspondente a 1.280 escudos.

$$1280 \times 0,70 = 896,00$$

Problema. Reduzir Cr$ 2.109,90 a moeda portuguesa ao câmbio de 0,65.

Solução. Dividindo a quantia dada por 0,65 temos 3246 escudos.

$$\frac{2109,90}{0,65} = 3246$$

Regra. *Para se reduzir moeda portuguesa à nossa moeda, multiplica-se o número de escudos pela taxa.*

E para se reduzir a nossa moeda à moeda portuguesa divide-se a quantia em cruzeiros pela taxa do câmbio sôbre Portugal.

1. Reduzir 780 escudos, ao câmbio de 0,40.
Resp. Cr$ 312,00

2. Reduzir 850 escudos à nossa moeda ao câmbio de 0,52.
Resp. Cr$ 442,00

3. Reduzir 1.200 escudos à nossa moeda ao câmbio de 0,48.
Resp. ?

4. Tendo de pagar em Lisboa 1.325,65 escudos, e estando o câmbio a 0,60, quanto tenho de pagar em nossa moeda para perfazer aquela quantia ?
Resp. ?

5. Reduzir Cr$ 1.750,00 a moeda portuguesa, ao câmbio de 0,61.
Resp. ?

Câmbio sôbre os Estados Unidos



127. O câmbio sôbre os Estados Unidos opera-se do mesmo modo que o câmbio sôbre a França.

A unidade monetária dos Estados Unidos é o *dollar*, que se divide em 100 *cents*. A palavra *dollar* pronuncia-se *dólar*, e o plural é *dollars*.

As grandes fortunas são avaliadas em milhares ou milhões de dollars, como duzentos mil dollars, três milhões de dollars, etc.



Para reduzirmos qualquer número de dollars a moeda brasileira ou vice-versa, seguiremos o mesmo processo que seguimos em relação ao **franco.**

Problema. Em quanto importam 250 dollars ao câmbio de 18,30 ?

Solução. Sendo o valor de um dollar 18,30, multiplica-se êste valor pelo número de dollars, que é 250, e o produto dá o seu importe, que é Cr$ 4575,00.

Para se reduzir a nossa moeda a dollars, divide-se a quantia na nossa moeda pelo valor de um dollar.

```
  18,30
    250
  -----
    915
   366
  -------
  4575,00
```

1. Em quanto importam 330 dollars, ao câmbio de 14,50?
Resp. Cr$ 4.785,00

2. Reduzir Cr$ 4.575,00 a dollares, ao câmbio de 18,30.
Resp. ?

Nota. Para mais amplo conhecimento do câmbio, vêde a nossa **Aritmética Progressiva.**

QUADRADOS E CUBOS

188. O produto de dois ou mais fatôres iguais chama-se potência. Assim,

$$5 \times 5 \times 5 \times 5$$

é uma potência de 5. O número que serve de fator é a *base* **da** potência; o número de fatôres é o *grau* da potência.

189. Indica-se uma potência escrevendo-se à direita da base e um pouco acima, em algarismos menores, um número igual ao grau da potência. Êste último número é o *expoente*.

Por exemplo:
6^2 lê-se: *segunda potência* de 6 e equivale a 6×6;
6^3 lêsse: *terceira potência* de 6 e equivale a $6 \times 6 \times 6$;
6^4 lê-se: *quarta potência* de 6 e equivale a $6 \times 6 \times 6 \times 6$;
6^5 lê-se: *quinta potência* de 6 e equivale a $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$.

190. A segunda potência de um número chama-se quadrado dêsse número; assim, o quadrado de 2 é 4, porque $2 \times 2 = 4$; o quadrado de 5 é 25, porque $5 \times 5 = 25$.

191. A terceira potência de um número chama-se cubo dêsse número; assim, o cubo de 3 é 27, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$; o cubo de 5 é 125, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

192. Os quadrados e cubos dos 10 primeiros números são os seguintes:

Números:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Quadrados:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
Cubos:	1,	8,	27,	64,	125,	216.	343,	512,	729,	1000

Problema. Qual é o quadrado de 13?

Solução. Multiplicaremos 13 por 13, e teremos 169, que é o quadrado de 13. $13 \times 13 = 169$

Problema. Qual é o cubo de 4?

Solução. Multiplicaremos 4 por 4, e teremos 16, que é o quadrado de 4. Depois multiplicaremos 16 por 4, e teremos 64, que é o cubo ou terceira potência de 4. $4 \times 4 \times 4 = 64$

Exercício de aplicação. Calcular as seguintes potências:

1. O quadrado de 25. Resp. 625
2. O quadrado de 101. " ?
3. O quadrado de 333. " ?
4. O cubo de 18. " ?
5. O valor de 21^3. " ?
6. O valor de 25^3. Resp. 15625
7. O valor de 36^2. " ?
8. O valor de 42^3. " ?
9. O valor de 56^3. " ?
10. O valor de 85^2. " ?

RAIZ QUADRADA E RAIZ CÚBICA

193. Raiz quadrada de um número é o número que, multiplicado por si reproduz o número dado. Assim, a raiz quadrada de 25 é 5, porque $5 \times 5 = 25$; a raiz quadrada de 36 é 6, porque $6 \times 6 = 36$. De sorte que 36 é o quadrado de 6, e 6 é a raiz quadrada de 36; do mesmo modo 25 é o quadrado de 5, e 5 é a raiz quadrada de 25.

Raiz cúbica de um número é o número que elevado ao cubo reproduz o número dado. Assim, a raiz cúbica de 8 é 2, porque $2^3 = 8$; a raiz cúbica de 125 é 5, porque $5^3 = 125$.

194. Sinal radical é o símbolo $\sqrt{}$ que se escreve sôbre um número, para mostrar que se deve extrair dêle a raiz indicada. Assim:

$\sqrt[2]{16}$ ou simplesmente $\sqrt{16}$ lê-se: a raiz quadrada de 16.

$\sqrt[3]{27}$ lê-se: a raiz cúbica de 27.

Extração da raiz quadrada

195. Extrair a raiz quadrada de um número é achar o número que, multiplicado por si, produz o número dado.

Nota. O método de extrair as raízes quadradas e cúbicas, que vamos expor, ainda que só se preste a extrair as raízes dos quadrados e cubos perfeitos, é contudo muito vantajoso e de fácil compreensão, e pode ser usado com grande proveito no ensino primário. O método para extração das raízes quadrada e cúbica de qualquer número pode ser encontrado em nossa **Aritmética Progressiva.**

Problema. Qual é a raiz quadrada de 576 ?

Solução. Decompondo o número 576 em seus fatores primos, segundo a regra exposta no n.º **57**, temos os fatores 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 e 3. Escrevendo êstes fatores iguais aos pares e fazendo uma multiplicação continuada de um fator de cada par, como vemos abaixo, temos 24, que é a raiz quadrada de 576.

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$\begin{matrix}2,\\2\end{matrix} \times \begin{matrix}2,\\2\end{matrix} \times \begin{matrix}2,\\2\end{matrix} \times \begin{matrix}3\\3\end{matrix} = 24$$

$$\sqrt{576} = 24$$

Regra. *Para se achar a raiz quadrada de um quadrado perfeito, decompõe-se êsse número em seus fatôres primos; dispõem-se os fatôres iguais aos pares e o produto continuado de um fator de cada par será a raiz quadrada.*

Exercício de aplicação. Extrair a raiz quadrada dos seguintes números:

1. $\sqrt{144}$	Resp. 12	**5.** $\sqrt{256}$	Resp. ?
2. $\sqrt{225}$	" 15	**6.** $\sqrt{196}$	" ?
3. $\sqrt{324}$	" 18	**7.** $\sqrt{729}$	" ?
4. $\sqrt{625}$	" 25	**8.** $\sqrt{1444}$	" ?

Extração da raiz cúbica dos cubos perfeitos

195. A extração da raiz cúbica, por meio da fatoração, opera-se do seguinte modo:

Problema. Qual é a raiz cúbica de 1728?

Solução. Decompondo o número 1728 em seus fatores primos, temos nove fatores.

Escrevendo os fatores iguais em grupos de três e depois multiplicando entre si um fator de cada grupo, temos

2, 2, 3.

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	1

Regra. *Para se extrair a raiz cúbica de um cubo perfeito, decompõem-se êsse número em seus fatôres primos; dispõem-se os fatôres iguais em grupos de três e o produto continuado de um fator de cada grupo será a raiz cúbica.*

Exercício de aplicação. Extrair a raiz cúbica dos seguintes números:

1. $\sqrt[3]{4096}$ Resp. 16
2. $\sqrt[3]{5832}$ " 18
3. $\sqrt[3]{27000}$ " 30
4. $\sqrt[3]{13824}$ " ?
5. $\sqrt[3]{3375}$ " ?
6. $\sqrt[3]{15625}$ Resp. ?
7. $\sqrt[3]{29791}$ " ?
8. $\sqrt[3]{35937}$ " ?
9. $\sqrt[3]{46656}$ " ?
10. $\sqrt{103823}$ " ?

PROBLEMAS GRADUADOS

Observação. Em cada grupo que se segue damos um problema resolvido, seguido de outros problemas semelhantes para os alunos resolverem pelo mesmo sistema.

Escreveremos *dois têrços, 2 têrços,* e 2/3, e o mesmo com outras frações, para os alunos se familiarizarem com os diversos modos de exprimir na escrita as partes de uma unidade.

No problema em que houver alguma dificuldade, daremos um auxílio, deixando ao aluno o resto da solução.

I

1. Problema. Custando 4 kg. de café Cr$ 32,00, quanto devem custar 6 kg.?

Solução. *4 kg. custando* Cr$ 32,00, *1 kg. deve custar a quarta parte de* Cr$ 32,00 *que é* 32.00 ÷ 4 = 8,00, *e 6 kg. devem custar 6 vêzes 8,00, que são* Cr$ 48,00.

2. Quanto deve custar um cento de laranjas, sabendo-se que 18 custam Cr$ 0,90 ? Resp. Cr$ 5,00.

3. Custando 7 sacos de farinha Cr$ 56,00, quanto devem custar 3 sacos ? Resp. ?

4. Se 7 metros de morim custam Cr$ 11,20, quanto devem custar 15 metros ? Resp. ?

5. Quanto custam 30 kg de açúcar refinado, sabendo-se que 9 kg. custam Cr$ 22,50 ? Resp. ?

6. Se um viajante anda 15 km em 3 horas, em 10 horas quantos km andará ? Resp. ?

7. Quanto custam 12 garrafas de vinho, sabendo-se que 5 garrafas custam Cr$ 47,50 ? Resp. ?

8. Um automóvel percorreu 128km de estrada em 4 horas. Se conservar a mesma velocidade, quantos quilômetros percorrerá em 10 horas e meia ? Resp. ?

9. Um impressor levou 8 horas para imprimir 5.000 fôlhas; quantas fôlhas imprimirá em 14 horas ? Resp. ?

10. Em um dia, 20 homens cartonaram 6.000 livros. Quantos livros cartonarão, no mesmo tempo, 35 homens ? Resp. ?

II

1. Se 15 homens fazem um muro em 40 dias, 24 homens em quantos dias o farão ?

Solução. *15 homens fazendo o muro em 40 dias, 1 homem poderá fazê-lo em tempo 15 vêzes maior, isto é, em* $40 \times 15 = 600$ *dias; e 24 homens poderão fazê-lo em* $600 \div 24 = 25$ *dias.*

2. Se 4 homens fazem um trabalho em 12 dias, 3 homens em quantos dias o farão ? Resp. 16.

3. Podendo 12 homens colhêr o café de uma fazenda em 12 dias, 9 homens em quantos dias o poderão colhêr? Resp. ?

4. Se 17 homens podem abrir um canal em 25 dias, 10 homens em quantos dias o poderão abrir ? Resp. ?

5. Um engenheiro calculou que, em 18 dias, poderia construir uma ponte provisória, se trabalhassem nela 15 operários; mas, sendo necessário concluí-la em 10 dias, quantos operários deveria empregar ? Resp. ?

6. Em 15 dias, 3 homens puderam forrar todos os compartimentos de uma casa; se trabalhassem 5 homens, em quantos dias os poderiam forrar ? Resp. ?

III

1. Se o salário de 3 homens em 5 dias é Cr$ 600,00, quanto deve ser o salário de 4 homens em 7 dias?

Solução. *Se o salário de 3 homens em 5 dias é* Cr$ 600,00, *de 1 homem em 5 dias será* 600,00 ÷ 3 = 200,00; *e em 1 dia, será* 200,00 ÷ 5 = 40,00. *Então, o salário de 1 homem em 7 dias será* 40,00 × 7 = 280,00, *e o de 4 homens será* 280,00 × 4 = 1 120,00, *isto é,* Cr$ 1 112,00.

2. Se 6 pessoas gastam Cr$ 720,00 em 8 dias, quanto devem gastar 5 pessoas em 12 dias? Resp. Cr$ 900,00.

3. Se 3 homens podem levantar 12 metros de parede em 8 dias, quantos metros poderão levantar 5 homens em 3 dias? Resp. ?

4. Se 6 cavalos comem 360 litros de milho em 10 dias, quantos litros 5 cavalos comerão em 9 dias? Resp. ?

5. Se uma família de 8 pessoas gasta Cr$ 4.000,00 em 5 meses, quanto gastará uma família de 11 pessoas, em 8 meses? Resp. ?

6. Se 5 bois comem 2 carros de feno em 6 dias, em quantos dias, 12 bois comerão 8 carros? Resp. 10.

7. Se um homem pode viajar 72 km em 6 dias, em quantos dias andará êle 108 km? Resp. ?

8. Se uma locomotiva gasta 12 toneladas de carvão em 20 dias, quantas toneladas gastará em 15 dias? Resp. ?

9. 10.000 livros foram cartonados por 20 operários em 5 dias. Quantos livros iguais poderão cartonar 8 dêsses operários em 12 dias? Resp. ?

10. 3 caminhões transportam 180 toneladas em 5 dias de trabalho. Quantas toneladas transportarão 5 caminhões iguais em 8 dias? Resp. ?

IV

1. Dividir 35 pêssegos por dois meninos, de sorte que um receba mais 9 de que o outro.

Solução. Subtraindo *9 de 35, restam* 35 — 9 = 26, *que é a soma de dois números iguais. Dividindo 26 por 2, temos 13. Então um número é 13, e o outro* 13 + 9 = 22.
Verificação. 13 + 22 = 35.

2. Dividir Cr$ 31,00 por duas pessoas, de modo que uma receba mais Cr$ 5,00 do que a outra. Resp. Cr$ 13,00 e Cr$ 18,00.

3. A soma de dois números é 139, e a sua diferença é 19; quais são os números? Resp. ?

4. Duas meninas têm 25 amêndoas; uma delas tendo mais 7 do que a outra, quantas tem cada uma? Resp. ?

5. A soma de dois números é 36, e a sua diferença é 8; quais são os números ? Resp. ?

6. Em uma escola mista havia 77 crianças; ora havendo mais 9 meninas do que meninos, qual era o número de cada sexo ? Resp. ?

7. Dois cestos contêm 100 laranjas: tendo um mais 12 laranjas do que o outro, quantas tem cada cesto ? Resp. ?

8. Um menino tem certo número de penas, outro tem o dôbro, e os dois têm 24; quantas penas tem cada um? Resp. ?

9. Um pai deixou 180.000 cruzeiros para 2 filhos, recomendando que um dêles ficasse com mais 5.000 do que outro. Com quanto ficou cada um ? Resp. ?

10. Entre dois meninos foram distribuídas 600 bolas de vidro de modo que a um coube o triplo do que coube a outro. Quantas bolas recebeu cada um ? Resp. ?

11. Num terreiro há mais 12 patos do que galinhas. Ao todo são 60 cabeças. Quantos são os patos e quantas as galinhas ?
Resp. ?

V

1. Dividir o número 28 em duas parcelas proporcionais a 3 e 4.

Solução. *Temos que dividir o número 28 em duas parcelas, de modo que uma tenha 3 partes, e a outra 4. Como o total das partes é 3 + 4 = 7, dividiremos 28 por 7, e teremos o quociente 4, que é o valor de 1 parte. Tendo uma das parcelas 3 partes, o seu valor é 4 × 3 = 12; tendo a outra 4 partes, o seu valor é 4 × 4 = 16.*

Verificação. 12 + 16 = 28.

2. Dividir Cr$ 35,00 em duas quantias na razão de 2 e 3.
Resp. Cr$ 14,00 e Cr$ 21,00.

3. Dividir o número 120 em três parcelas na razão de 3, 4 e 5. Resp. ?

4. Dois homens alugaram um pasto por Cr$ 72,00; um pôs lá 6 cavalos, e outro pôs 2, quanto deve pagar cada alugador ? Resp. ?

5. Dois vaqueiros alugaram um capinzal por Cr$ 140,00; um tinha lá 4 vacas, e outro tinha 3; quanto deveria pagar cada um ? Resp. ?

6. Dois irmãos compraram de sociedade um cavalo por Cr$ 2.400,00; um entrou com Cr$ 1.000,00, e o outro com Cr$ 1.400,00; venderam-no no mesmo dia por Cr$ 3.600,00; que parte do lucro deve agora receber cada um ? Resp. ?

Auxílio. Como 1 000,00 e 1 400,00 podem ser divididos por 200,00, o lucro pode ser dividido em partes proporcionais a 5 e 7.

7. Um pai deixou 1.000.000 de cruzeiros para serem divididos entre dois filhos em partes proporcionais às suas idades, que eram 12 e 8 anos, respectivamente. Quanto recebeu cada um ? Resp. ?

8. O lucro de 240.000 cruzeiros foi dividido entre 3 sócios em partes proporcionais aos seus capitais, que eram 10.000, 25.000 e 45.000 cruzeiros. Qual a parte de lucro de cada um ? Resp. ?

VI

1. Dividir o número 15 em duas partes, de sorte que a menor seja $\frac{2}{3}$ da maior.

Solução. *Se a parte menor é $\frac{2}{3}$ da maior, segue-se que a maior é $\frac{3}{3}$, e as duas partes são $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Ora, se $\frac{5}{3}$ de um número são iguais a 15, $\frac{1}{3}$ é igual a* $15 \div 5 = 3$ *sendo $\frac{3}{3}$ a parte maior ela é igual a* $3 \times 3 = 9$; *a outra parte é* $3 \times 2 = 6$.

Verificação. $9 + 6 = 15$.

2. Dividir o número 98 em duas partes, de sorte que a menor seja $\frac{2}{5}$ da maior. Resp. 70 e 28.

3. Silvano e Fulgêncio têm de pagar 60$; mas tendo Fulgêncio de pagar sòmente a metade da parte de Silvano, quanto tem de pagar cada um ? Resp. ?

4. Um viajante andou em dois dias 56 km; tendo caminhado no segundo dia sòmente $\frac{3}{4}$ da distância que caminhou no primeiro, quanto andou cada dia? Resp. ?

5. Dividir o número 45 em três parcelas, de sorte que a segunda seja $\frac{1}{2}$, e a terceira $\frac{3}{4}$ da primeira. Resp. ?

6. Dividir o número 45 em três parcelas, de sorte que a segunda seja $\frac{2}{3}$, e a terceira $\frac{3}{6}$ da primeira. Resp. ?

7. Em dois dias um viajante gastou 630 cruzeiros, sendo que no segundo dia gastou $\frac{3}{7}$ do que gastara no primeiro. Qual a despesa em cada dia ? Resp. ?

8. Um aluno resolveu 80 problemas; o número dos que conseguiu acertar é igual a $\frac{3}{5}$ dos que errou. Quantos problemas acertou e quantos errou ? Resp. ?

9. Um terreno com 1.260m² foi dividido em duas partes de sorte que a área de uma seja $\frac{2}{7}$ da área da outra. Quantos metros quadrados tinha cada parte ? Resp. ?

VII

1. Se dois têrços de um queijo custam Cr$ 8,00, quanto deve custar o queijo inteiro ?

Solução. *Custando 2 têrços* Cr$ 8,00, *1 têrço deve custar a metade de* Cr$ 8,00, *que é* Cr$ 4,00 *e 3 têrços, que são o queijo inteiro, devem custar* 4,00 × 3 = 12,00, *isto é,* Cr$ 12,00.

2. Custando $\frac{3}{5}$ de um barril de vinho Cr$ 180,00 quanto deve custar o barril inteiro ? Resp. Cr$ 300,00.

3. Pesando $\frac{}{8}$ de uma barra de ferro 33 kg ; quanto deve pesar a barra inteira ? Resp. ?

4. Eu sei que cinco sétimos de certo número são 50; qual é êsse número ? Resp. ?

5. De que quantia Cr$ 8,00 são dois têrços ? Resp. ?

6. Se $\frac{6}{9}$ do ordenado de um jardineiro são Cr$ 450,00, qual é o seu ordenado ? Resp. ?

7. Um menino gastou $\frac{3}{5}$ do dinheiro que tinha, e ainda lhe sobraram Cr$ 4,00; quanto tinha êle ? Resp. ?

8. Uma menina deu $\frac{1}{4}$ das amêndoas que tinha a uma colega, e restaram-lhe 15; quantas amêndoas tinha? Resp. ?

9. Gastei $\frac{4}{5}$ do meu dinheiro e restaram-me sòmente Cr$ 260,00, que quantia possuia eu ? Resp. ?

10. Se $\frac{6}{7}$ do sôldo de um oficial são Cr$ 600,00, qual é o seu sôldo inteiro ? Resp. ?

11. Calcular a área de um terreno sabendo que " do mesmo medem 2.200m. Resp. ?

12. José retirou $\frac{7}{10}$ dos selos de sua coleção e ainda ficou com 960 selos. De quantos selos se compunha a coleção ? Resp. ?

VIII

1. Custando $\frac{2}{3}$ de uma pipa de aguardente Cr$ 96,00, quanto devem custar $\frac{3}{4}$ da mesma pipa ?

Solução. *Custando 2 têrços* Cr$ 96,00, *1 têrço deve custar metade de* Cr$ 96,00 *que é* Cr$ 48,00; *e 3 têrços que são a pipa inteira, devem custar* 48,00 × 3 = 144,00. *Ora, custando a pipa* Cr$ 144,00, *1 quarto da pipa deve custar* 144,00 ÷ 4 = 36,00 *e 3 quartos devem custar* 36,00 × 3 = 108,00, *isto é,* Cr$ 108,00.

2. Custando $\frac{3}{5}$ de um saco de feijão Cr$ 144,00, quanto devem custar $\frac{9}{10}$? Resp. Cr$ 216,00.

3. Se $\frac{3}{8}$ de uma barra de ferro pesam 40 kg ; quanto devem pesar $\frac{5}{8}$ da mesma barra ? Resp. ?

4. Se dois quintos de uma barrica de farinha custam Cr$ 40,00, quanto devem custar três décimos da mesma barrica ? Resp. ?

5. Custando $\frac{5}{6}$ de uma barra de ouro Cr$ 850,00, quanto devem custar $\frac{6}{8}$ da mesma barra ? Resp. ?

6. Se $\frac{3}{4}$ da extensão de uma avenida medem 1.200 metros, quantos metros medirão $\frac{4}{5}$ dessa avenida ? Resp. ?

7. Se três quartos de certo número são 120, quanto devem ser sete oitavos do mesmo número ? Resp. ?

8. Se $\frac{2}{9}$ de um campo valem Cr$ 400,00, quanto devem valer $\frac{5}{6}$ do mesmo campo ? Resp. ?

9. Nove sétimos de um terreno medem 9.450m²; quantos metros quadrados medem $\frac{7}{9}$ do mesmo terreno ? Resp. ?

10. Para encher $\frac{5}{11}$ de um barril foram necessários 110 litros de vinho. Quantos litros seriam precisos para encher $\frac{3}{4}$ do mesmo barril ? Resp. ?

IX

1. Certo número e a sua têrça parte somam 20, qual é êsse número ?

Solução. *O número tem $\frac{3}{3}$, juntando mais $\frac{1}{3}$ são $\frac{4}{3}$. Ora, se $\frac{4}{3}$ de um número são iguais a 20, $\frac{1}{3}$ é igual a $20 \div 4 = 5$, e $\frac{3}{3}$ são iguais a $5 \times 3 = 15$.*

2. Se juntarmos a certo número $\frac{3}{4}$ do mesmo número, teremos 21; qual é êsse número ? Resp. 12.

3. Se eu adicionar a certo número $\frac{2}{7}$ do mesmo número, terei a soma de 90; qual é o número ? Resp. ?

4. Se eu puser no meu cofre $\frac{3}{5}$ do dinheiro que já ali guardei, terei então Cr$ 56,00; que quantia tinha no cofre ? Resp. ?

5. Qual é a quantia que adicionada a $\frac{7}{8}$ de si mesma, dá a soma Cr$ 75,00 ? Resp. ?

6. Qual é o número que, se lhe juntarmos $\frac{3}{5}$ de si mesmo dará a soma 80 ? Resp. ?

7. Um cobrador recebeu um dia certa quantia; no dia seguinte recebeu metade do que havia recebido, e ficou então com Cr$ 135,00; quanto recebeu no primeiro dia ? Resp. ?

8. De certo número subtraindo $\frac{2}{7}$ de si mesmo, restam 20; qual é êsse número ? Resp. ?

X

1. Reduzir $\frac{3}{4}$ a oitavos.

Solução. *Multiplicando-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, não se altera o seu valor; ora multiplicando ambos os têrmos de $\frac{3}{4}$ por 2, temos o denominador em oitavos. Portanto $\frac{3}{4}$ reduzidos a oitavos são $\frac{6}{8}$. Isto é evidente, porque $1 = \frac{8}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ e $\frac{3}{4}$ são iguais a 3 vêzes $\frac{2}{8}$ que são $\frac{6}{8}$.*

2. Reduzir $\frac{2}{3}$ a sextos.
3. Reduzir $\frac{1}{3}$ a nonos.
4. Reduzir $\frac{2}{5}$ a décimos.
5. Reduzir $\frac{4}{5}$ a trigésimos.
6. Reduzir $\frac{5}{6}$ a doze avos.
7. Reduzir $\frac{3}{4}$ a doze avos.
8. Reduzir $\frac{6}{7}$ a quatorze avos.
9. Reduzir $\frac{1}{2}$ a décimos.
10. Quantos nonos são $\frac{2}{3}$?
11. Quantos décimos são $\frac{4}{5}$?
12. Quantos oitavos há em $\frac{1}{2}$?
13. Quantos sextos são $\frac{2}{3}$?
14. Quantos quinze avos são $\frac{4}{5}$?
15. Quantos doze avos são $\frac{5}{6}$?
16. Quantos décimos são $\frac{3}{5}$?
17. Quantos quatorze avos são $\frac{5}{7}$?

XI

1. A soma de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ do certo número é 28, qual é êsse número?

Solução. *As duas frações reduzidas a um denominador comum e somadas dão $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Ora, sendo $\frac{7}{12}$ de um número iguais a 28, $\frac{1}{12}$ é igual a $28 \div 7 = 4$, e $\frac{12}{12}$, que formam o número inteiro, iguais a $4 \times 12 = 48$.*

Verificação. *$\frac{1}{4}$ de 48 é 12, $\frac{1}{3}$ de 48 é 16; a soma das duas parcelas é $12 + 16 = 28$.*

2. Uma pessoa comprou uma porção de ovos, e, se a têrça e a quarta parte dêles fôssem reunidas, somariam 56; quantos ovos comprou? Resp. 96.

3. Em um colégio $\frac{1}{2}$ dos alunos estuda Gramática, $\frac{1}{3}$ estuda Aritmética, e os demais, que são 10, estudam Geografia; quantos alunos tem êste colégio? Resp. ?

4. Se da minha idade subtraíssem $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ dos meus anos, restariam só 2; quantos anos tenho? Resp. ?

5. Um menino gastou $\frac{3}{5}$ do seu dinheiro, e restaram-lhe 16 tostões; que quantia tinha êle? Resp. ?

XII

1. Um jornaleiro contratou-se em uma fazenda por 40 dias, nas seguintes condições: receber Cr$ 2,00 e comida cada dia que trabalhasse, e pagar Cr$ 1,00 pela comida, cada dia que não trabalhasse. Tendo recebido Cr$ 50,00 no fim dos 40 dias, deseja-se saber: quantos dias trabalhou?

Solução. *Se trabalhasse 40 dias, receberia 40 vêzes* Cr$ 2,00 *que são* Cr$ 80,00; *mas, como recebeu sòmente* Cr$ 50,00, *perdeu* 80,00 — 50,00 = 30,00. *Ora, como em cada dia que êle não trabalhou perdeu* Cr$ 3,00, *sendo* Cr$ 2,00 *do jornal e* Cr$ 1,00 *da comida, segue-se que êle deixou de trabalhar tantos dias quantas vêzes* 3,00 *estão contidos em* 30,00, *que são* 30,00 ÷ 3,00 = = 10. *Portanto deixou de trabalhar 10 dias, e trabalhou* 40 — 10 = 30 *dias.*

2. Um chacareiro contratou-se por 60 dias nas seguintes condições: receber Cr$ 1,50 e comida, cada dia que trabalhasse, e pagar Cr$ 0,50 pela comida, cada dia que deixasse de trabalhar. Recebendo no fim dos 60 dias Cr$ 68,00, quantos dias trabalhou? Resp. ?

3. Um jardineiro foi cuidar de um jardim, nestas condições: receber Cr$ 6,00 cada dia que trabalhasse, e nada ganhar e ainda pagar a multa de Cr$ 4,00, cada dia que deixasse de trabalhar. No fim de 80 dias, recebeu êle Cr$ 400,00; quantos dias trabalhou? Resp. ?

4. Dois cestos contêm 37 laranjas; em um dêles há mais 17 laranjas do que no outro; quantas laranjas tem cada um? Resp. ?

5. Dois números somam 54; um é o dôbro do outro; quais são os números? Resp. ?

6. Um livro tem o triplo de páginas de outro. Os dois reunidos teriam 750 páginas. Quantas páginas tem cada um? Resp. ?

7. A coleção de selos de João é o dôbro da de Antônio e a dêste é o triplo da de Joaquim. As três coleções reunidas somam 4.500 selos. Quantos selos tem cada um? Resp. ?

XIII

1. Quais são os juros de Cr$ 800,00 a 4 por cento ao ano durante 5 anos?

Solução. *4 por cento são* $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$. Ora $\frac{1}{25}$ *de* 800,00 *é* $\frac{1}{25} \times 800,00 =$ $= 32,00$ *que são os juros de 1 ano; os juros de 5 anos são* $32,00 \times 5 = 160,00$.

2. Achar os juros de Cr$ 500,00 a 8 por cento ao ano, em 9 anos. Resp. Cr$ 360,00.

3. Ache os juros de Cr$ 8.200,00 a 7 % ao ano em dois anos. Resp. ?

4. Quanto somam os juros e o capital de Cr$ 750,00, em 3 anos, a 8 por cento ao ano? Resp. ?

5. Comprei 12 sacos de feijão por Cr$ 600,00. Por quanto os devo vender para ganhar 30 por cento? Resp. ?

6. Um negociante comprou certas mercadorias por Cr$ 840,00, e ganhou nelas 75 por cento; por quanto as vendeu? Resp. ?

7. Eduardo gastou 85 por cento de Cr$ 120,00 em roupa de que precisava; em quanto importou essa roupa? Resp. ?

8. Achar os juros de Cr$ 250,00 a 4 por cento ao ano, em 6 anos. Resp. ?

9. Achar os juros de Cr$ 2.000,00 a 8 por cento ao ano, em três anos. Resp. ?

10. Achar os juros de Cr$ 4.000,00, em 5 anos, a 6 por cento ao ano. Resp. ?

11. Quais são os juros de 200 libras esterlinas, a 3 por cento ao ano, em 9 anos? Resp. £ 54.

XIV

1. Comprei um relógio por Cr$ 50,00, e vendi-o por Cr$ 70,00; quantos por cento ganhei ?

Solução. *Ganhei* 70,00 — 50,00 = 20,00. *Como* Cr$ 20,00 *são* $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ *do custo, e* $\frac{2}{5}$ *de* 100 *são* 40, *segue-se que ganhei* 40 *por cento.*

2. Albano comprou um cavalo por Cr$ 400,00, e vendeu-o por Cr$ 600,00; quantos por cento ganhou? Resp. 50.

3. Um livreiro comprou uma obra em doze volumes por Cr$ 200,00, e vendeu-a por Cr$ 230,00; quantos por cento ganhou? Resp. ?

4. Um chale custou Cr$ 50,00 e foi vendido por Cr$ 80,00; quantos por cento deu de lucro? Resp. ?

5. Comprei uma peça de sêda por Cr$ 120,00, e vendi-a por Cr$ 200,00; quantos por cento ganhei? Resp. ?

6. Um homem comprou um cavalo por Cr$ 500,00, e vendeu-o por Cr$ 475,00; quantos por cento perdeu? Resp. ?

XV

1. Um alfaiate pode fazer um terno de roupa em 6 dias, e sua mulher pode fazê-lo em 12 dias; trabalhando ambos, em quantos dias o poderão fazer ?

Solução. *O alfaiate fazendo o terno em 6 dias, faz $\frac{1}{6}$ da obra por dia; e sua mulher fazendo-o em 12 dias, faz $\frac{1}{12}$ por dia. Trabalhando ambos, fazem $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ da obra por dia. Ora, como a obra é um inteiro ou $\frac{4}{4}$, segue-se que, se dividirmos $\frac{4}{4}$ por $\frac{1}{4}$, teremos o número de dias, $\frac{4}{4}\div\frac{1}{4}=4$ dias.*

2. Se A pode fazer um serviço em 2 dias e B pode fazê-lo em 3 dias, em quantos dias o poderão fazer, trabalhando ambos?
Resp. $1\frac{1}{5}$ dia.

3. Um lavrador pode colhêr todo o seu arroz em 5 dias, e seu filho pode colhê-lo em 7; trabalhando ambos, em quantos dias o poderão colhêr ?
Resp. $2\frac{11}{12}$ dias.

4. A pode fazer um serviço em 2 dias, B em 3 dias e C em 6 dias; em que tempo os três juntos o podem fazer ?
Resp. 1 dia.

5. Um cavalo pode comer um saco de milho em 8 dias, uma vaca o pode em 12 dias, e um carneiro em 24 dias; comendo os três juntos, quantos dias durará o milho ?
Resp. 4 dias.

6. A e B podem lavrar um campo em 4 dias; podendo B lavrá-lo sòzinho em 12 dias, em quanto tempo poderá A lavrá-lo sòzinho ?
Resp. ?

Auxílio. A pode lavrar $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}$ ou $\frac{1}{6}$ do campo por dia, e por isso pode lavrá-lo em 6 dias.

XVI

1. Um tanque tem duas torneiras; uma o enche em 4 horas, e a outra o enche em 5. Abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas ficará cheio ?

Solução. *Uma torneira enche o tanque todo em 4 horas; então, em 1 hora enche $\frac{1}{4}$ do tanque. A outra torneira enche o tanque todo em 5 horas; então, em 1 hora enche $\frac{1}{5}$ do tanque. As duas torneiras juntas encherão $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ do tanque em uma hora. Se em 1 hora enchem $\frac{9}{20}$ do tanque em $\frac{1}{9}$ da hora encherão $\frac{1}{20}$ do tanque e para encher o tanque todo ou $\frac{20}{20}$ levarão 20 vêzes mais tempo ou $\frac{1}{9}\times 20=\frac{20}{9}$ da hora, ou $2\frac{2}{9}$ horas.*

2. Uma banheira é provida de duas torneiras; uma a enche em 6 minutos, e a outra em 4. Abrindo-se as duas torneiras em quantos minutos ficará cheia? Resp. $2\frac{2}{5}$ minutos.

3. Uma torneira enche uma caixa de água em 6 minutos e outra a enche em 8; estando as duas torneiras abertas, em quantos minutos ficará cheia? Resp. $3\frac{3}{7}$ minutos.

4. Um depósito de água tem duas torneiras, uma o enche em 15 horas, e outra o esvazia em 20 horas; abrinda as duas torneiras, em quantas horas o depósito ficará cheio?

Auxílio. Se uma torneira em cada hora enche $\frac{1}{15}$ do depósito e a outra torneira retira $\frac{1}{20}$, claro está que, em cada hora, só ficará no tanque a água equivalente a $\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{60}$ do tanque. Logo são precisas 60 horas para encher o tanque.

5. Uma torneira enche uma caixa em 9 horas, e outra a esvazia em 12 horas; em quantas horas ficará cheia, abrindo-se as 2 torneiras? Resp. 36 horas.

XVII

1. A soma de 5 números consecutivos é 130; quais são êsses números?

Solução. *O* **primeiro** *número é o menor; o* **segundo** *número tem mais uma unidade ou 1 do que o primeiro; o* **terceiro** *tem mais 2 do que o primeiro; o* **quarto** *tem mais 3; e o* **quinto** *tem mais 4. Êstes excedentes somam* $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. *Subtraindo* 10 *de* 130, *teremos* 120 *que é agora a soma de 5 números iguais ao menor. Êste é* $120 \div 5 = 24$. *Portanto 24 é o primeiro número pedido e os outros são* $24 + 1 = 25$, $24 + 2 = 26$, $24 + 3 = 27$, e $24 + 4 = 28$.

Verificação. $24 + 25 + 26 + 27 + 28 = 130$.

2. A soma de 3 números consecutivos é 120; quais são êsses números? Resp. 39, 40 e 41.

3. A soma de 6 números consecutivos é 63; quais são êsses números? Resp. ?

4. A soma de 2 números consecutivos é 979; quais são êsses números? Resp. ?

5. A soma de 5 números consecutivos é 235; quais são êsses números? Resp. ?

XVIII

1. Como poderemos achar a soma dos números consecutivos 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 sem os adicionar como parcelas?

Análise. *Se escrevermos a metade dos têrmos na ordem crescente, começando pelo primeiro, e depois a outra metade na ordem decrescente, começando pelo último têrmo, formaremos 5 pares de têrmos, somando igualmente 25 cada um, e os 5 pares somando* 25 × 5 = 125, *que é a soma de todos os têrmos. Neste processo aritmético notamos dois fatos:*

8	9	10	11	12
17	16	15	14	13
25	25	25	25	25

25 x 5 = 125

O **primeiro** *é que a soma de cada par é igual à soma do primeiro e do último, isto é, do menor e do maior, que são 8 e 17.*

O **segundo** *é que o número de partes é igual à metade do número de têrmos, isto é, a metade de 10. Portanto se multiplicarmos a soma do primeiro e do último têrmo pela metade do número de têrmos, obteremos a soma de todos os têrmos sem os adicionar; pois* 8 + 17 = 25, *e* 25 × 5 = 125.

Verificação. 8+9+10+11+12+13+14+15+16+17=125.

2. Qual é a soma de todos os números consecutivos desde 12 até 18 ?

Resp. $(12 + 18) \times 3\frac{1}{2} = 105$.

3. Qual é a soma de todos os números inteiros desde 1 até 1 000 ?

Resp. 500500.

XIX

1. Natalino, encontrando alguns pobres que lhe pediam uma esmola, quis socorrer a todos igualmente; mas notou que, se desse Cr$ 0,30 a cada um, sobrariam Cr$ 1,20, e se desse Cr$ 0,50 faltariam Cr$ 0,80 qual era o número de pobres ?

Solução. *Se desse* Cr$ 0,30 *a cada um, sobrariam* Cr$ 1,20, *mas se desse* Cr$ 0.50, *isto é, mais* Cr$ 0,20 *a cada um, teria de dar os* Cr$ 1,20 *que sobravam e mais os* Cr$ 0,80 *que faltavam, e que somam* 1,20 + 0,80 = 2,00. *Os pobres eram, pois, tantos quantas vêzes o número* 0,20 *está contido em* 2, *isto é, eram* 2 ÷ 0,2 = 10.

2. Um pai quis distribuir pelos filhos alguns abacates que lhe mandaram de presente; mas notou que, se desse 2 a cada um, sobrariam 9, e, se desse 4, faltariam 3 para completar a divisão; quantos filhos tinha êle ? Resp. 6.

3. Uma menina quis repartir as suas amêndoas pelas suas colegas, e notou que se desse 3 a cada uma, restariam 24; e se lhes desse 7, daria tôdas; quantas colegas tinha a menina?

Resp. ?

4. Um fazendeiro queria comprar certo número de ovelhas para a sua fazenda, e notou que, se as comprasse a Cr$ 20,00, restar-lhe-iam Cr$ 200,00; e se as comprasse a Cr$ 50,00, faltar-lhe-iam Cr$ 400,00; quantas ovelhas queria comprar? Resp. ?

XX

1. Três irmãs Júlia, Sofia e Fausta, tinham as seguintes idades: Júlia tinha 8 anos, Sofia tinha a idade de Júlia e mais $\frac{1}{5}$ da idade de Fausta, e Fausta tinha tantos anos quantos tinham Júlia e Sofia; qual era a idade de Fausta ?

Solução. *Júlia tinha 8 anos. Sofia tinha 8 anos, mais $\frac{1}{5}$ da idade do de Fausta. Fausta tinha 8 anos, mais 8 anos, mais $\frac{1}{5}$ da sua idade, isto é, tinha 16 anos mais $\frac{1}{5}$ de sua idade. Logo, 16 anos são iguais a $\frac{4}{5}$ de sua idade e 4 anos iguais a $\frac{1}{5}$; então $\frac{5}{5}$ são iguais a 20 anos, que era a sua idade.*

2. Um homem comprou um chapéu, um relógio e uma capa; o chapéu custou Cr$ 60,00; o relógio custou tanto como o chapéu e $\frac{2}{5}$ do preço da capa, e a capa custou tanto como o relógio e o chapéu; quanto custou a capa ? Resp. Cr$ 200,00.

3. Três cidades, A, B e C estão situadas em linha reta; a distância de A a B é 24 km ; e $\frac{7}{8}$ desta distância são iguais a $\frac{3}{7}$ da distância de B a C; que distância há de A a C ?
Resp. 73 km.

4. Uma pessoa tinha três herdeiros A, B e C, e deixou $\frac{2}{7}$ dos seus bens a A; $\frac{1}{3}$ a B, e os remanescentes a C. Havendo entre o legado de A e o de C sòmente a diferença de Cr$ 1.600,00, quanto recebeu cada herdeiro ?
Resp. A = Cr$ 4.800,00, B = Cr$ 5.600,00, C = Cr$ 6.400,00.

5. Se 1 boi vale 8 carneiros, e 3 bois valem 2 cavalos, qual é o preço de 1 cavalo, valendo 1 carneiro Cr$ 15,00.
Resp. ?

6. A idade de Sara é $\frac{2}{3}$ da idade de Dalila, e a soma das duas idades é 20 anos; qual é a idade de cada uma ?
Resp. Dalila 12 an. Sara 8 an.

ÍNDICE

OBSERVAÇÃO

Se os Srs. Professores quiserem dar aos seus discípulos mais completos conhecimentos desta ciência, poderão usar o nosso curso de ARITMÉTICA PROGRESSIVA, onde acharão esta matéria devidamente desenvolvida.

N.º 5.351 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

$\frac{42}{7} = 6$



$$\frac{45 \times 6}{9 \times 3} = \frac{\overset{5}{\cancel{45}} \times \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{9}} \times \underset{1}{\cancel{3}}} = 10$$

$\sqrt{576} = 24$







